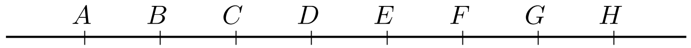
Interrogation n° 3. Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

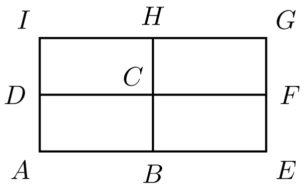
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$
2. Expression en repère orthonormé : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$
3. $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

Exercice 2 (2 points)
On donne $AB = 1$.



1. $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CG} = CE \times CG = 2 \times 4 = 8$
2. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EA} = -EF \times EA = -1 \times 4 = -4$

Exercice 3 (3 points)
On donne $AB = BE = 4$, et $AD = DI = 2$.



1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = AB \times AE = 4 \times 8 = 32.$
2. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DD} = AD \times 0 = 0.$
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{IA} = -AD \times IA = -2 \times 4 = -8.$

Exercice 4 (2 points)
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1. ABC un triangle équilatéral de côté $AB = 10$.
   Avec la formule du cosinus,
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 10 \times 10 \times \cos\frac{\pi}{3} = 100 \times \frac{1}{2} = 50.}$
2. ABC est un triangle rectangle isocèle en A et $AB = 1$.
   Comme ABC est rectangle en A, $(AB) \perp (AC)$, et $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0.}$

Exercice 5 (5 points)
Dans un repère orthonormé, on donne les points $E(1;-4)$, $F(5;3)$, et $G(-2;-5)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = -19$.
   $\overrightarrow{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$, donc $\overrightarrow{EF}(4;7)$. De même, $\overrightarrow{EG}(-3;-1)$.
   $\boxed{\text{Alors } \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = xx' + yy' = 4 \times (-3) + 7 \times (-1) = -12 - 7 = -19.}$
2. Calculer EF et EG.
   $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}.$
   $EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}.$
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{FEG})$, puis la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ arrondie à un degré près.
   $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos(\widehat{FEG})$.
   $\boxed{\text{Donc } \cos(\widehat{FEG}) = \frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \frac{-19}{\sqrt{65} \times \sqrt{10}}.}$
   $\boxed{\text{À la calculatrice on obtient } \widehat{FEG} \approx 138° \text{ (138 degrés).}}$

Exercice 6 (5 points)
Les questions sont indépendantes.

1. $\boxed{\left(\frac{1000}{0,1}\right)^{-4} = \left(\frac{10^3}{10^{-1}}\right)^{-4} = (10^4)^{-4} = 10^{-16}}$
2. $\boxed{9^{-4} \times 3^5 \times 81 = (3^2)^{-4} \times 3^5 \times 3^4 = 3^{-8+5+4} = 3^1 = 3}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{3}x - \frac{4}{5} = 2x + 1$.
   $\frac{5x - 12}{15} = 2x + 1$, puis $5x - 12 = 15(2x + 1)$, et $25x = -27$, $\boxed{x = -\frac{27}{25}.}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - x < 11 + 4x$.
   $2 - x < 11 + 4x$, $-5x < 9$, et donc $\boxed{x > -\frac{9}{5}.}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x(2x + 7) = 0$.
   $x = 0$ ou $(2x+7) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -\frac{7}{2}$. $\boxed{\text{Les solutions sont 0 et } -\frac{7}{2}.}$
6. Déterminer le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ de $G(x) = (6x + 5)(12 - 3x)$.
   Valeurs clés : $6x + 5 = 0$ ssi $x = -\frac{5}{6}$, et $12 - 3x = 0$ ssi $x = 4$.

x	$-\infty$		$-5/6$		4		$+\infty$
$6x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$12-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 7 (bonus, 1 point)
$\boxed{\overrightarrow{u}(2;-5) \text{ est bien orthogonal à } \overrightarrow{v}(5;2) \text{ car } \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 5 \times 2 + 2 \times (-5) = 0.}$

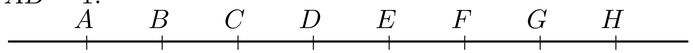
Interrogation n° 3. Correction du sujet 2

Exercice 8 (cours, 3 points)

1. Formule du cosinus. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
2. Expression en repère orthonormé. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$
3. Dans un repère orthonormé, soit $\overrightarrow{u}(x;y)$. $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 9 (2 points)

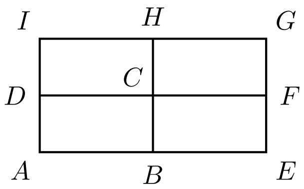
On donne $AB = 1$.



1. $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DF} = -DA \times DF = -2 \times 4 = -8$
2. $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EB} = EC \times EB = 2 \times 3 = 6$

Exercice 10 (3 points)

On donne $AB = BE = 4$, et $AD = DI = 2$.



1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA} = -AB \times BA = -6 \times 6 = -36$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EE} = AB \times 0 = 0$.
3. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI} = AD \times IA = 3 \times 6 = 18$.

Exercice 11 (2 points)

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

1. On donne $||\overrightarrow{u}|| = 1$, $||\overrightarrow{v}|| = 3$, et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}$.

   $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 1 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{2} = 3 \times 0 = 0.}$

2. On donne $||\overrightarrow{u}|| = 4$, $||\overrightarrow{v}|| = 7$, et $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = \frac{2\pi}{3}$.

   $\boxed{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = 4 \times 7 \times \cos\frac{2\pi}{3} = 28 \times (-\frac{1}{2}) = -14.}$

Exercice 12 (5 points)

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-2;-5)$, $B(1;-4)$, et $C(5;3)$

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 29$.
   $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, $\overrightarrow{AB}(1-(-2); -4-(-5))$, soit $\overrightarrow{AB}(3;1)$.
   De même, $\overrightarrow{AC}(7;8)$.

   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 3 \times 7 + 1 \times 8 = 29.}$

2. Calculer AB et AC.

   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$.
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{7^2+8^2} = \sqrt{113}$.

3. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$, puis la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à un degré près.
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

   $\boxed{\text{Donc } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{29}{\sqrt{113}\times\sqrt{10}}.}$

   À la calculatrice on obtient $\widehat{FEG} \approx 30°$ (30 degrés).

Exercice 13 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. $\boxed{\frac{100^3}{0,01^2} = \frac{(10^2)^3}{(10^{-2})^2} = \frac{10^6}{10^{-4}} = 10^{10}}$
2. $\boxed{\frac{4^3 \times 2^{-3}}{8^5} = \frac{2^6 \times 2^{-3}}{(2^3)^5} = \frac{2^3}{2^{15}} = 2^{-12}}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} = 3x + 1$.
   $\frac{8x-3}{6} = 3x+1$, puis, $8x - 3 = 6(3x+1)$, donc $10x = -9$, $\boxed{x = -0,9.}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - 6x < 1 + x$.
   $2 - 6x < 1 + x$, $-7x < -1$, $\boxed{x > \frac{1}{7}.}$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x(5x+1) = 0$.
   ($x = 0$ ou $5x + 1 = 0$), soit ($x = 0$ ou $x = -0,2$).
   les solutions sont 0 et $-0,2$.
6. Déterminer le tableau de signe sur $\mathbb{R}$ de $G(x) = (3x+1)(2-x)$.
   Valeurs clés : $3x + 1 = 0$ ssi $x = -\frac{1}{3}$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		$-1/3$		2		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 14 (bonus, 1 point)

$\overrightarrow{u}(2;-5)$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{v}(5;2)$ car $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 5 \times 2 + 2 \times (-5) = 0$.