Chapitre 1 : Raisonnement par récurrence

Propriété
On considère une propriété $P(n)$ qui dépend d'un nombre entier naturel n.
Soit n_0 un entier naturel.
Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie ;
2. **Hérédité** : pour tout entier $k \geqslant n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie ;

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque (Explication)
Si on a $P(0)$ vraie, et pour tout $k \geqslant 0$ $(P(k) \Rightarrow P(k+1))$, alors :
– $P(0)$ est vraie et $(P(0) \Rightarrow P(1))$ donc $P(1)$ est vraie.
– $P(1)$ est vraie et $(P(1) \Rightarrow P(2))$ donc $P(2)$ est vraie.
– En poursuivant "de proche en proche" ce raisonnement, on a $P(n)$ vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
On peut faire l'analogie avec les dominos :
si l'on renverse le premier domino, et que chaque domino en tombant renverse le suivant, alors tous les dominos tombent.

Exemple :
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.
Solution
On raisonne par récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on va montrer la propriété $P(n)$: "$4^n - 1$ est divisible par 3".
– Initialisation : $P(0)$ est vérifiée, car $4^0 - 1 = 0$ est divisible par 3.
– Hérédité : Soit un entier $k \geqslant 0$:
Supposons que la propriété $P(k)$: "$4^k - 1$ est divisible par 3" est vraie.
Montrons $P(k+1)$: "$4^{k+1} - 1$ est divisible par 3".
On a :

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= \underbrace{3 \times 4^k}_{\text{divisible par 3}} + \underbrace{4^k - 1}_{\substack{\text{divisible par 3} \\ \text{(hypothèse de récurrence)}}} \end{aligned}$$

Par somme de nombres divisibles par 3, $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3.
– Conclusion : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
Par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Remarque

1. La propriété $P(n)$ peut être une égalité, une inégalité, une propriété exprimée par une phrase, etc.
2. La condition d'hérédité est une implication : on montre, pour un entier $k \geqslant n_0$, que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
   Une propriété $P(n)$ qui vérifie cette deuxième condition est dite héréditaire.

Exercice 1

1. Montrer que la propriété $P(n)$: "$4^n + 1$ est divisible par 3" est héréditaire.

2. Peut-on en conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 2
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $2^n > 2n$.

Exercice 3
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Valider cette conjecture en raisonnant par récurrence.

Exercice 4
Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5
Soit u la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 6
Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $4^n \geqslant 4n + 1$.

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$.