Correction du devoir surveillé de mathématiques n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.

   (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   Limite en $-\infty$.
   On a une forme indéterminée.
   En développant, $g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
   $\boxed{\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0.}$
   Limite en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
   $\boxed{\text{Par produit, } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$

   (b) Dresser le tableau de variations de g. Justifier.
   Les fonctions $x \mapsto x-1$ et exp sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Par produit de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On rappelle la formule de dérivée d'un produit :
   $$(u \times v)' = u'v + uv'$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} g'(x) &= 1\mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x \\ &= (1 + x - 1)\mathrm{e}^x \\ &= x\mathrm{e}^x \end{aligned}$$
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ a le même signe que x.
   La valeur clé est $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   $g(0) = (0-1)\mathrm{e}^0 = -1$.

   (c) Justifier que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   D'après les variations de g, l'équation $g(x) = 1$ n'a pas de solution sur $]-\infty; 0]$.
   Sur l'intervalle $[0; +\infty[$,
   – g est continue (car dérivable),
   – g est strictement croissante (car $g' > 0$ pour $x > 0$ et $g'(0) = 0$),
   – $g(0) = -1 < 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
   Comme cette équation n'a pas de solution sur $]-\infty; 0]$, α est l'unique solution sur $\mathbb{R}$.

   (d) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   On obtient $1,27 < \alpha < 1,28$.
   $\boxed{\text{En arrondissant à } 10^{-2} \text{ par défaut, } \alpha \approx 1,27.}$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

(a) Déterminer les coordonnées du point en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a.
La tangente en a est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(a) = 0$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\mathrm{e}^x + (x-2)\mathrm{e}^x \\ &= (x-1)\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x - 1 = 0$, soit $x = 1$.
$f(1) = (1-2)\mathrm{e}^1 = -\mathrm{e}$.
$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C} \text{ est parallèle à l'axe des abscisses au point } A(1;-\mathrm{e}).}$

(b) Justifier que $\mathscr{C}$ admet une unique tangente T parallèle à la droite d'équation $y = x$ et préciser l'abscisse du point de $\mathscr{C}$ correspondant.
La tangente au point d'abscisse a est parallèle à la droite d'équation $y = x$ ssi elles ont le même coefficient directeur, ce qui revient à $f'(a) = 1$.
En remarquant que $f' = g$, d'après la question 1(d), l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution qui est α.
$\boxed{\mathscr{C} \text{ admet une unique tangente } T \text{ parallèle à la droite d'équation } y = x, T \text{ est la tangente au point d'abscisse } \alpha \approx 1,27.}$

Exercice 2

1. La température (en $^\circ$C), de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t, en heures, définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (on pourra prendre 2cm pour 1h en abscisses, et 1 cm pour 20 $^\circ$C en ordonnées).

(a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$, et dresser son tableau de variation.
Limite en $+\infty$.
$\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$.
$\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Par composée, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$.
$\boxed{\text{Par produit et somme, } \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 200 \times 0 + 20 = 20.}$
Image de 0.
$\boxed{f(0) = 200\mathrm{e}^0 + 20 = 200 + 20 = 220.}$
Dérivée et variations.
$t \mapsto -\frac{t}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composée, $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[0;+\infty[$.
On rappelle que pour une fonction u dérivable, $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.

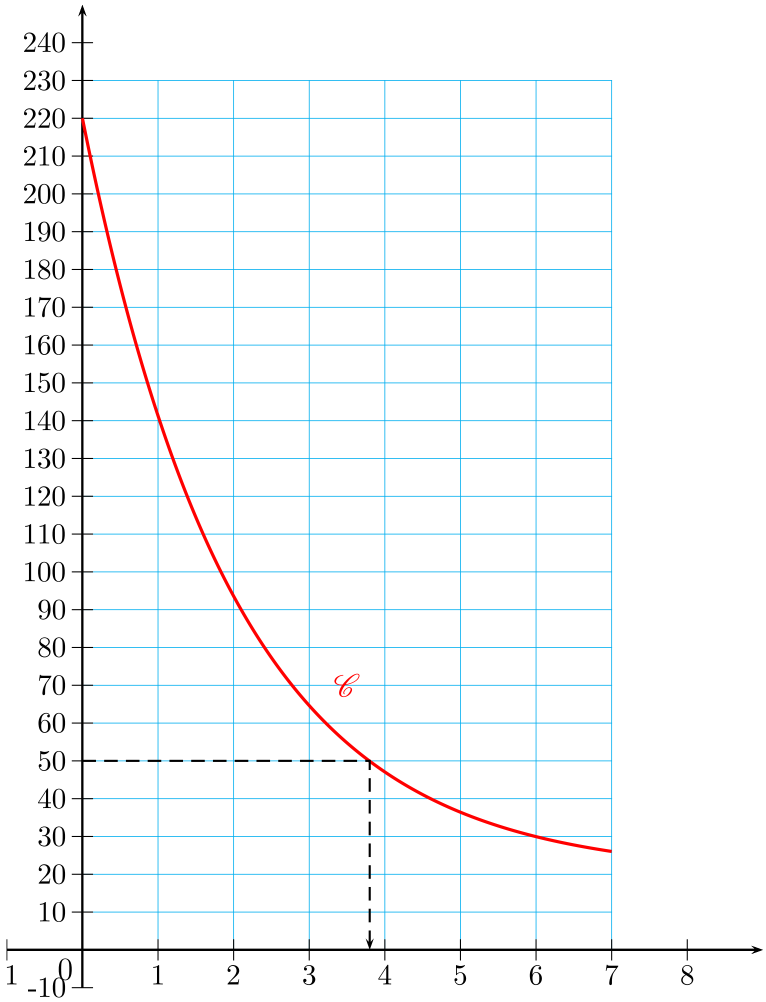
Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 200 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \\ &= -100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 0 \end{aligned}$$

En effet, une exponentielle est toujours strictement positive.
Donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	220 ↘	20

(b) Tracer $\mathscr{C}$ sur $[0; 7]$.



(c) Lire graphiquement une valeur approchée, à l'heure près, de l'instant où la température de l'objet est de 50 °C. On laissera les traits de construction.
$f(t) = 50$ pour $t \approx 3,8$.

En arrondissant à l'heure près, la température de l'objet est de 50 °C au bout de 4 heures environ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = f(n) - f(n+1)$.
d_n représente la diminution de température entre l'heure n et l'heure $n+1$.

(a) Exprimer d_n en fonction de n et montrer que

$$d_n = 200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{n}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
d_n &= f(n) - f(n+1)\\
&= 200e^{-\frac{n}{2}} + 20 - \left[200e^{-\frac{n+1}{2}} + 20\right]\\
&= 200\left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}}\right)\\
&= 200\left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&= 200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

(b) Justifier que la suite (d_n) est décroissante et qu'elle converge 0.

Sens de variation

Comme $1 - e^{-\frac{1}{2}} > 0$, il est clair que $d_n > 0$.

On étudie le rapport $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ (à comparer à 1).

$$\begin{aligned}
\frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{e^{-\frac{n}{2}}}\\
&= e^{-\frac{n+1}{2}} \times e^{\frac{n}{2}}\\
&= e^{-\frac{1}{2}}\\
&\approx 0,6 < 1
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (d_n) \text{ est décroissante.}}$

Limite

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{n}{2} = -\infty.$

$\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0.$

Par composée, $\lim e^{-\frac{n}{2}} = 0.$

$\boxed{\text{Par produit, } \lim d_n = 0.}$

(c) Écrire un algorithme qui déterminera la plus petite valeur n_0 du nombre entier n à partir de laquelle la diminution de température sera inférieure à 1 $^\circ$C.

Comme la suite est (d_n) est décroissante, il suffit de déterminer le plus petit entier n tel que $d_n \leqslant 1$.

Il est clair que cet entier existe car (d_n) tend vers 0.

$d_0 = 200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) e^0 = 200\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right).$

Algorithme :

DÉBUT
- N prend la valeur 0
- D prend la valeur $200\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$.
- Tant que $D>1$,
  - N prend la valeur $N+1$
  - D prend la valeur $200\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{N}{2}}$
- Fin Tant que.
- Afficher N.

FIN

(d) Déterminer n_0 à l'aide de la calculatrice.

$\boxed{\text{On obtient } n_0 = 9.}$

La baisse de température d'une heure à la suivante devient inférieure à $1\,^{\circ}\mathrm{C}$ à partir de 9 heures.