Interrogation n° 5
Réponses du sujet 1 (tout n'est pas détaillé)

Exercice 1 (6 points)

La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

Poids x_i	300	303	307	308	309	310	311	312	313	314	315	317	318	319
Effectifs n_i	1	1	1	3	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1
ECC	1	2	3	6	8	10	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Compléter les effectifs cumulés croissants de la série dans le tableau.
2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série. Justifier.
   L'effectif total est $N = 20$ (pair).
   Donc la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales, la 10e et la 11e.
   $\boxed{Me = \dfrac{310+311}{2} = 310,5.}$
   $\dfrac{N}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$. Q_1 est la 5e valeur : $\boxed{Q_1 = 308.}$
   $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{60}{20} = 15$. Q_3 est la 15e valeur : $\boxed{Q_3 = 313.}$
3. Rappeler les formules permettant de calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique, puis, en utilisant le menu statistique de la calculatrice, donner la moyenne m et l'écart type s de la série (aucun détail de calcul n'est demandé).

$$m = \frac{x_1n_1 + \cdots + x_pn_p}{N} = 310,65$$

$$V = (f_1x_1^2 + \cdots + f_px_p^2) - (m)^2$$
$$s = \sqrt{V} \approx 4,55$$

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   "Au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m-s; m+s]$".
   $m - s \approx 310,65 - 4,55 \approx 306,1$.
   $m + s \approx 310,65 + 4,55 \approx 315,2$.
   Il y a 5 valeurs en dehors de l'intervalle $[m-s; m+s]$, ce qui revient à dire qu'il y a 15 valeurs dans cet intervalle.
   $\dfrac{15}{20} \times 100 = 75$.
   Il y a 75 % des poids dans l'intervalle $[m-s; m+s]$.
   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse}}$

Exercice 2 (4 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = 8 - n^2$.
   (a) Calculer V_0, V_1 et V_2. $\boxed{V_0 = 8,\ V_1 = 7,\ V_2 = 4.}$
   (b) Étudier les variations de (V_n).
   Pour tout n, $V_{n+1} - V_n = 8-(n+1)^2-(8-n^2) = -2n-1 < 0$.
   $\boxed{(V_n) \text{ est décroissante.}}$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n^2 + 3$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = u_0 - 0^2 + 3 = 3 + 3 = 6$.
   $u_2 = u_1 - 1^2 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8$.
   (b) Étudier les variations de (u_n).
   $u_3 = u_2 - 2^2 + 3 = 8 - 4 + 3 = 7$.
   Comme $u_0 < u_1$, (u_n) n'est pas décroissante.
   Comme $u_3 < u_2$, (u_n) n'est pas croissante.
   $\boxed{(u_n) \text{ n'est ni croissante ni décroissante.}}$

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (A_n) définie par $A_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = \dfrac{1}{3}A_n + 4$.

1. Calculer A_1 et A_2 (rédiger les calculs).
   $A_1 = \dfrac{1}{3}A_0 + 4 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{12}{3} = \dfrac{13}{3}$.
   $A_2 = \dfrac{1}{3}A_1 + 4 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{13}{3} + 4 = \dfrac{13}{9} + \dfrac{36}{9} = \dfrac{49}{9}$.
2. Compléter l'algorithme suivant qui renvoie A_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné en entrée, puis donner une valeur approchée de A_8 arrondie à 10^{-4} près.

```
Entrer N
A prend la valeur [1]
Pour K allant de [1] à N
```

$\boxed{\texttt{A}}$ `prend la valeur` $\boxed{\frac{1}{3}\texttt{A+4}}$

`Fin Pour`

`Afficher A`

$\boxed{A_8 \approx 5,9992.}$

3. On admet que la suite (A_n) converge vers 6.

   (a) Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|A_{n_0} - 6| < 10^{-7}$.

   Voici un algorithme qui convient :

   DEBUT

   N `prend la valeur 0`

   A `prend la valeur 1`

   `Tant que` $|A-6| \geqslant 10^{-7}$

   N `prend la valeur` $N+1$

   A `prend la valeur` $\frac{1}{3}A+4$

   `Fin Tant que`

   `Afficher` N

   FIN

   (b) Programmer l'algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.

   $\boxed{\text{On trouve } n_0 = 17.}$

Exercice 4 (3,5 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{7n+6}{n+3} - \dfrac{7n-1}{n+2} = \ldots = \dfrac{15}{(n+2)(n+3)} > 0.$

   $\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est croissante.}}$

2. Justifier qu'elle est majorée par 7.

   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n - 7 = \dfrac{7n-1}{n+2} - \dfrac{7(n+2)}{n+2} = \dfrac{-15}{n+2} < 0.$

   $\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n < 7.\ (u_n) \text{ est majorée par 7.}}$

3. En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout entier n.

   Toute suite croissante est minorée par son 1er terme.

   Ici, $u_0 = -0,5$.

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ -0,5 \leqslant u_n < 7. \text{ La suite } (u_n) \text{ est bornée.}}$

Exercice 5 (1,5 point)

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

1. Écrire un algorithme qui calcule et renvoie T_n pour n donné en entrée.

   `Entrer` n

   T `prend la valeur 0`

   `Pour` K `allant de 1 à` n

   T `prend la valeur` $T + \dfrac{1}{K^2}$

   `Fin Pour`

   `Afficher` T.

2. Le programmer et donner la valeur de T_{20} arrondie à 10^{-2}.

   On obtient $T_{20} \approx 1,596163$. $\boxed{T_{20} \approx 1,60 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$

Exercice 6 (1 point)

Donner un exemple de suite décroissante et bornée (la suite pourra être définie par son terme général ou par récurrence). Aucune justification n'est attendue.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ définie pour tout } n \geqslant 0 \text{ par } u_n = \dfrac{1}{n+1} \text{ convient (pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1).}$

Exercice 7 (bonus 1,5 points)

On considère la série statistique formée des valeurs entières suivantes :

$$6, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17$$

En remplaçant une valeur par une autre valeur entière, on souhaite rendre l'écart-type le plus petit possible. Quelle modification faut-il faire ?

Sur la série de départ, à l'aide de la calculatrice, on obtient comme moyenne $\overline{x} \approx 11,11$.

L'écart-type décrit de la dispersion par rapport à la moyenne.

Pour réduire au maximum l'écart-type, on remplace la valeur de la série la plus éloignée de la moyenne : le 17.

On le remplace par l'entier le plus proche de la moyenne de la série constituée des nombres une fois qu'on a enlevé le 17. La moyenne devient alors 10,375.

$\boxed{\text{On remplace donc le 17 par un 10.}}$

Interrogation n° 5
Réponses du sujet 2 (tout n'est pas détaillé)

Exercice 8 (6 points)

La pesée automatique d'un lot de 20 barquettes d'un produit alimentaire a donné les résultats suivants (arrondis au gramme) :

Poids x_i	300	303	307	308	309	310	311	312	313	314	316	317	318	319
Effectifs n_i	1	1	1	2	2	1	3	2	1	1	2	1	1	1
ECC	1	2	3	5	7	8	11	13	14	15	17	18	19	20

1. Compléter les effectifs cumulés croissants de la série dans le tableau .
2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série. Justifier.
   $\boxed{Me = 311,\ Q_1 = 308, \text{ et } Q_3 = 314.}$
3. Rappeler les formules permettant de calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique, puis, en utilisant le menu statistique de la calculatrice, donner la moyenne m et l'écart type s de la série (aucun détail de calcul n'est demandé).
   $\boxed{m = 311,2,\ s \approx 4,6968.}$
4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   "Au moins 80 % des poids sont dans l'intervalle $[m-s; m+s]$".
   $m - s \approx 306,5$, et $m + s \approx 315,9$.
   Il y a 7 valeurs en dehors de l'intervalle, soit 13 dans l'intervalle.
   $\frac{13}{20} = 0,65$.
   Il y a 65% des poids dans l'intervalle $[m-s; m+s]$.
   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

Exercice 9 (4 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = \frac{-2}{n+1}$.
   (a) Calculer V_0, V_1 et V_2.
   $V_0 = -2$, $V_1 = -1$ et $V_2 = \frac{-2}{3}$.
   (b) Étudier les variations de (V_n).
   La suite $(n+1)$ est croissante, donc $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ décroissante, et en multipliant par $-2 < 0$, la suite (V_n) est croissante.
   Ou bien, $V_{n+1} - V_n = \frac{-2}{n+2} + \frac{2}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$.
   $\boxed{(V_n) \text{ est croissante.}}$
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = u_0 + 3 \times 0 + 1 = 3 + 1 = 4$.
   $u_2 = u_1 + 3 \times 1 + 1 = 4 + 3 + 1 = 8$.
   (b) Étudier les variations de (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3n + 1 > 0$.
   $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

Exercice 10 (4 points)

On considère la suite (A_n) définie par $A_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = \frac{3}{2}A_n + 1$.

1. Calculer A_1 et A_2 (rédiger les calculs).
   $A_1 = \frac{3}{2}A_0 + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.
   $A_2 = \frac{3}{2}A_1 + 1 = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} + 1 = \frac{19}{4}$.
2. Compléter l'algorithme suivant qui renvoie A_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné en entrée, puis donner une valeur approchée de A_8 arrondie à 10^{-4} près.
   `Entrer N`
   `A prend la valeur` $\boxed{1}$
   `Pour` K `allant de` $\boxed{1}$ `à N`
   $\boxed{\texttt{A}}$ `prend la valeur` $\boxed{\frac{3}{2}A + 1}$
   `Fin Pour`
   `Afficher A`
   $\boxed{\text{On obtient } A_8 \approx 74,8867.}$
3. On admet que la suite (A_n) diverge vers $+\infty$.
   (a) Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $A_{n_0} \geqslant 10^5$.
   Debut
   N `prend la valeur 0`
   A `prend la valeur 1`

```
Tant que A < 10^5
N prend la valeur N + 1
A prend la valeur 3/2 A + 1
Fin Tant que
Afficher N
FIN
```

(b) Programmer l'algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.
$\boxed{n_0 = 26.}$

Exercice 11 (3,5 points)
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1-2n}{n+5}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1-2n}{n+6} - \dfrac{1-2n}{n+5} = \dfrac{-11}{(n+5)(n+6)} < 0.$
$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$
2. Justifier qu'elle est minorée par -2.
$u_n - (-2) = u_n + 2 = \dfrac{11}{n+5} > 0.$
$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > -2.\ (u_n) \text{ est minorée par } -2.}$
3. En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout entier n.
Comme elle est décroissante, (u_n) est majorée par $u_0 = 0,2$.
$\boxed{\text{La suite est bornée. Pour tout } n \in \mathbb{N},\ -2 < u_n \leqslant 0,2.}$

Exercice 12 (1,5 point)
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{1} + 2 + \frac{1}{2} + \cdots + n + \frac{1}{n}$.

1. Écrire un algorithme qui calcule et renvoie T_n pour n donné en entrée.

```
Entrer n
T prend la valeur 0
Pour K allant de 1 à n
T prend la valeur T + K + 1/K
Fin Pour
Afficher T.
```

2. Le programmer et donner la valeur de T_{20} arrondie à 10^{-2}.
$\boxed{\text{À } 10^{-2} \text{ près, } T_{20} \approx 213,60.}$

Exercice 13 (1 point)
Donner un exemple de suite croissante et minorée par 5 (la suite pourra être définie par son terme général ou par récurrence). Aucune justification n'est attendue.
$\boxed{\text{La suite définie pour tout entier } n \text{ par } u_n = n + 5 \text{ convient.}}$

Exercice 14 (bonus 1,5 points)
On considère la série statistique formée des valeurs entières suivantes :

$$6, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17$$

En remplaçant une valeur par une autre valeur entière, on souhaite rendre l'écart-type le plus petit possible. Quelle modification faut-il faire ?
Sur la série de départ, à l'aide de la calculatrice, on obtient comme moyenne $\overline{x} \approx 11,11$.
L'écart-type décrit de la dispersion par rapport à la moyenne.
Pour réduire au maximum l'écart-type, on remplace la valeur de la série la plus éloignée de la moyenne : le 17.
On le remplace par l'entier le plus proche de la moyenne de la série constituée des nombres une fois qu'on a enlevé le 17. La moyenne devient alors 10,375.
$\boxed{\text{On remplace donc le 17 par un 10.}}$