1G. Correction du dm6

Exercice 1

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = -5x^4 + 24x^2 + 2.$$

2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (3 - 2x)\sqrt{x}$.

$$\text{Pour tout } x > 0, f'(x) = -2\sqrt{x} + (3 - 2x)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. f est définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{11}{x^2 - 3x}$.

$$\text{Pour tout } x > 3, f'(x) = 11 \times \frac{-(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2} = \frac{-22x + 33}{(x^2 - 3x)^2}.$$

4. f est définie sur $] -9; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5 - x}{x + 9}$.

$$\text{Pour } x > -9, f'(x) = \frac{-1(x + 9) - (5 - x) \times 1}{(x + 9)^2} = -\frac{14}{(x + 9)^2}.$$

5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x - 6)^3$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5 \times 3(5x - 6)^2 = 15(5x - 6)^2.$$

Exercice 2

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

1. Soit $a \neq 0$. Exprimer en fonction de a l'équation de la tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a .

En tout réel $a \neq 0$, f est dérivable et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$y = -\frac{1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a}$$

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

$$T_a \text{ a pour équation } y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

2. Soit d la droite d'équation $y = -\frac{1}{9}x + 7$.

Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe de f qui sont parallèles à la droite d . Pour chacune, donner l'équation réduite et les coordonnées du point de contact avec la courbe de f .

T_a est parallèle à d ssi T_a a le même coefficient directeur que d , $-\frac{1}{9}$.

Le coefficient directeur de T_a est $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

D'où $-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{9}$ ssi $a^2 = 9$ ssi $(a = -3 \text{ ou } a = 3)$.

Il y a deux tangentes parallèles à la droite d , ce sont les tangentes aux points d'abscisses respectives -3 et 3 .

— Pour T_3 .

$$\text{Point de contact : } f(3) = \frac{1}{3}. A \left(3; \frac{1}{3} \right).$$

Équation réduite (en remplaçant a par 3 dans le résultat de la question 1) :

$$y = -\frac{1}{3^2}x + \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}.$$

— Pour T_{-3} .

$$\text{Point de contact : } f(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}. \quad B \left(-3; -\frac{1}{3} \right).$$

$$\text{Équation réduite : } y = -\frac{1}{(-3)^2}x + \frac{2}{(-3)} = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}.$$

Les tangentes parallèles à d sont :

$$\text{au point } A \left(3; \frac{1}{3} \right), T_3 \text{ d'équation } y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3},$$

$$\text{et au point } B \left(-3; -\frac{1}{3} \right), T_{-3} \text{ d'équation } y = -\frac{1}{9}x - \frac{2}{3}.$$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

1. Déterminer l'expression du terme général u_n de la suite (en fonction de n).

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr, \text{ soit } u_n = 2 + 3n.$$

2. Calculer le huitième terme.

$$u_7 = 2 + 3 \times 7 = 23. \quad \text{Le 8}^\text{e} \text{ terme est } u_7 = 23.$$

3. Déterminer le sens de variation de la suite.

La suite est arithmétique et de raison $r = 3$.

$$\text{Comme } r > 0, \text{ la suite est strictement croissante.}$$

4. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{17}$.

$$u_{17} = 2 + 3 \times 17 = 53.$$

La somme S compte 18 termes consécutifs.

D'après la somme des termes d'une suite arithmétique,

$$S = \frac{u_0 + u_{17}}{2} \times 18 = \frac{2 + 53}{2} \times 18 = 55 \times 9 = 495.$$

Exercice 4

Au 31 décembre 2019, Sophia a reçu 75 euros d'étrennes, puis chaque année celles-ci augmentent de 8 euros. Pour tout entier naturel n , on note a_n le montant des étrennes reçues le 31 décembre de l'année $(2019+n)$. Ainsi, $a_0 = 75$.

1. Donner les valeurs a_1 et a_2 des étrennes en décembre 2020 et 2021.

$$a_1 = a_0 + 8 = 75 + 8 = 83.$$

$$a_2 = a_1 + 8 = 83 + 8 = 91.$$

$$\text{Elle reçoit 83 euros en décembre 2020 et 91 euros en décembre 2021.}$$

2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n , puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n .

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + 8.$$

Donc (a_n) est la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $a_0 = 75$.

$$\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nr = 75 + 8n.$$

3. Quel montant reçoit-elle le 31 décembre 2034 ?

2034 = 2019 + 15, donc 2034 correspond à $n = 15$.

$$a_{15} = 75 + 8 \times 15 = 195.$$

$$\text{Le 31/12/2034, elle reçoit 195 euros.}$$

4. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2034 ?

Il s'agit de calculer la somme des termes consécutifs $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{15}$.

Elle comporte 16 termes.

$$S = \frac{a_0 + a_{15}}{2} \times 16 = \frac{75 + 195}{2} \times 16 = 2160.$$

$$\text{Le 31/12/2034, elle aura reçu au total 2160 euros en étrennes.}$$