Chapitre 19 : Loi normale centrée réduite. Lois normales

I Introduction : le théorème de Moivre-Laplace

Rappel :
Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, alors $E(X) = np$, et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)
Soit $p \in]0;1[$. On suppose que pour tout entier non nul n, la variable X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Soit Z_n la variable aléatoire $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, pour tous réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Remarque

- La démonstration est admise.
- Ce théorème a un rôle fondamental : il permet, lorsque le nombre d'épreuves est assez grand, d'approcher une loi binomiale par une loi normale.

Exercice 1
Cet exercice revient sur une propriété vue en première.
Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance μ et d'écart-type σ.
Soient a et b des nombres réels, on considère la variable aléatoire $Y = aX + b$.

1. Montrer que $E(Y) = a \times E(X) + b = a\mu + b$.
2. Montrer que $V(Y) = a^2 V(X) = a^2\sigma^2$.

On dit que l'espérance est linéaire car $E(aX + b) = aE(X) + b$.
La variance est invariante par translation $V(X + b) = V(X)$, et quadratique $V(aX) = a^2 V(X)$.

Exercice 2
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, on a $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
On pose $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

1. Déterminer $E(Z)$.
2. Déterminer $\sigma(Z)$.

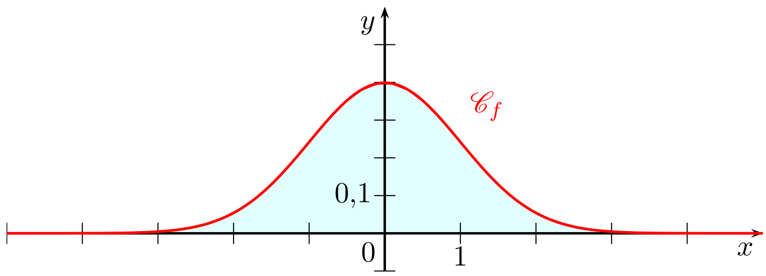
Exercice 3
Soit X une variable suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10\,000$ et $p = 0,5$.
On note Z la variable centrée réduite associée à X.

1. Exprimer la variable Z en fonction de X, puis X en fonction de Z.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X lorsque Z prend des valeurs comprises entre $-0,34$ et 2,12.
3. Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} de $\displaystyle\int_{-0,34}^{2,12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$.
4. Utiliser la calculatrice pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de $P(4983 \leqslant X \leqslant 5106)$, et comparer avec le résultat précédent.

II La loi normale centrée réduite

II.1 Définition

Définition
La loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ est la loi continue ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

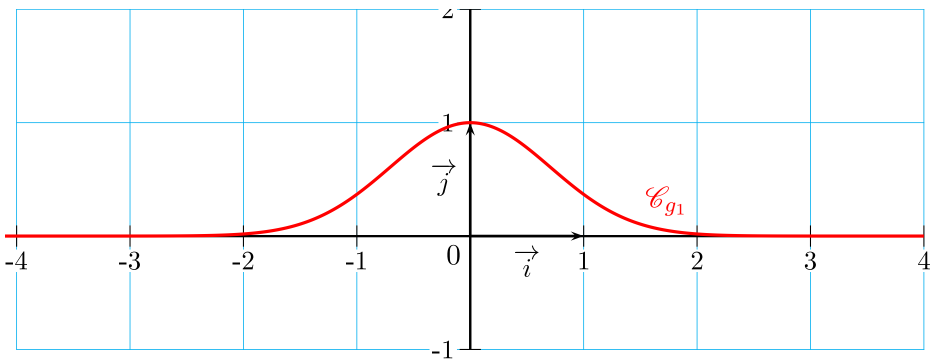


Remarque

1. f est bien une fonction de densité :
   — il est clair que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
   — on admet que l'aire sous la courbe est 1 : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.
2. $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$.
3. on a étudié les fonctions $g_k : x \mapsto \mathrm{e}^{-kx^2}$, avec $k > 0$ à la fin du chapitre sur la fonction exponentielle.
   On a montré que $g_k'(x) = -2kx\mathrm{e}^{-kx^2}$, est du signe de $(-x)$.
   $g_k(0) = 1$, l'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$, et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

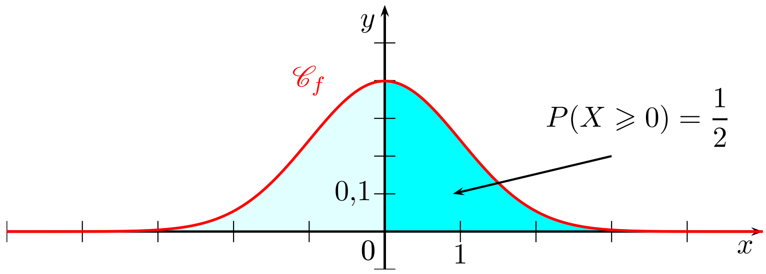
Courbe représentative pour $k = 1$. $g_1(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.



II.2 Propriétés de la loi normale centrée réduite

Propriété

1. f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tous réels a et b, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'aire totale sous la courbe est 1. Elle représente $P(X \in]-\infty; +\infty[)$.
4. La fonction f est paire, donc la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   Par conséquent, $P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$.
5. Pour tout nombre réel a,
   (a) $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$ (symétrie)
   (b) $P(X \leqslant -a) = 1 - P(X \leqslant a)$



Remarque

1. La courbe de f est appelée courbe de Gauss (courbe en cloche).
2. Son maximum est atteint en 0.
3. Comme elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on a $P(X \geqslant 0) = P(X \leqslant 0) = \frac{1}{2}$.

Remarque (utilisation de la calculatrice)
Les calculatrices proposent une instruction pour calculer $P(a < X < b)$.

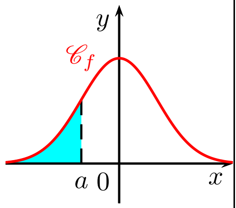
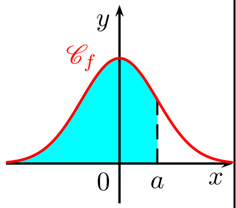
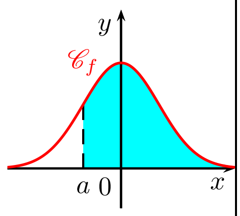
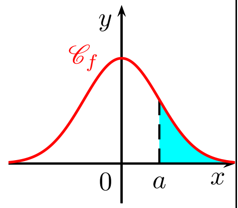
	Casio	Texas
Syntaxe	*Optn*, *STAT* (F5), *DIST* (F3), *NORM* (F1)	*Distrib* (2nde *var*)
$P(a < X < b)$	choisir *Ncd* : `NormCD(a,b)`	`normalFRep(a,b)` ou `normalCD(a,b)`
Nombre réel k tel que $P(X < k) = c$	choisir *InvN* : `InvNormCD(c)`	`FracNormale(c)`

Exemple :
Soit X une variable suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
$P(-1 < X < 0,2) \approx 0,42$.

Remarque
Les commandes `normalpdf` (ou `normalFdp` version française) pour Texas, ou `Npd` pour Casio, permettent d'obtenir les valeurs prises par la fonction densité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Par exemple, normalFdp(0) calcule $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$.

Application aux calculs de probabilités du type $P(X < a)$ ou $P(X > a)$.

Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < 0$	$P(X < a)$ pour $a > 0$	$P(X > a)$ pour $a < 0$	$P(X > a)$ pour $a > 0$
Graphique				
Calcul	$\frac{1}{2} - P(a < X < 0)$	$\frac{1}{2} + P(0 < X < a)$	$P(a < X < 0) + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - P(0 < X < a)$

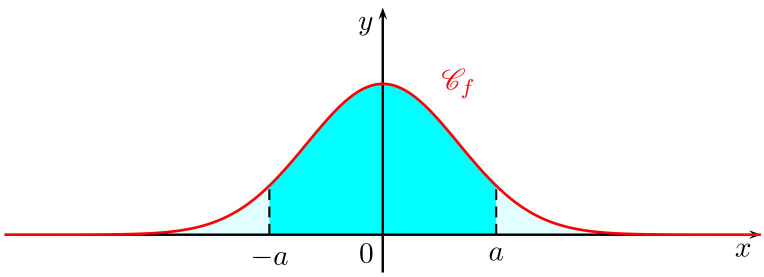
Exemple :
Dans le cas du calcul de $P(X > a)$ avec $a > 0$, on a

$$P(0 < X < a) + P(X > a) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$$

D'où $P(X > a) = \frac{1}{2} - P(0 < X < a)$.

Propriété
Posons $\Phi(t) = P(X \leqslant t)$. On dit que Φ est la fonction de répartition associée à la loi de X suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Alors, pour tout réel a,

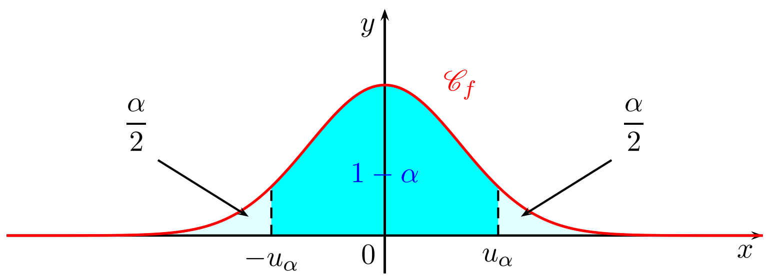
1. $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.
2. $P(-a < X < a) = 2\Phi(a) - 1$.
3. La fonction Φ est croissante sur $\mathbb{R}$.



Démonstration

1. $\Phi(-a) = P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - \Phi(a)$.
2. $P(-a < X < a) = P(X < a) - P(X < -a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$.
3. Évident car f est positive sur $\mathbb{R}$. □

Théorème
Si X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.



Démonstration (à connaître)
Soit $u \geqslant 0$.

Par symétrie de la courbe de f, on a $P(-u \leqslant X \leqslant u) = 2P(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x = 2G(u)$ où G est la primitive de f qui s'annule en 0 (comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives).
G est continue et strictement croissante ($G' = f > 0$) sur $[0; +\infty[$.
En outre, $\lim\limits_{u\to+\infty} G(u) = \dfrac{1}{2}$ car cela correspond à l'aire sous la courbe de f sur $[0; +\infty[$.
La fonction $2G$ est donc continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ avec le tableau de variation suivant :

u	0	$+\infty$
$2G$	0 $\nearrow$	1

Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, on a $1 - \alpha \in]0; 1[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique $u_\alpha > 0$ tel que $2G(u_\alpha) = 1 - \alpha$.
Conclusion :
Pour tout $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$. □

Propriété
1. Une valeur approchée de $u_{0,05}$ est 1,96.
2. Une valeur approchée de $u_{0,01}$ est 2,58.

Remarque
Interprétation : si X suit la loi $\mathscr{N}(0; 1)$, alors
1. $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$.
2. $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$.

Propriété
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est 0 et son écart-type est de 1.

Remarque
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Démonstration
1. Espérance.

   La fonction densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

   Donc $g(t) = tf(t) = \dfrac{t}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t)=\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

On veut montrer que $E(X)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,\mathrm{d}t=0$, soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t=0$.

Pour passer à la limite sur les bornes d'intégration, on montre que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Pour tout $a<0$, $\displaystyle\int_{a}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t=G(0)-G(a)$.

Or, $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} G(a)=0$ (par composée et produit).

Donc $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t=G(0)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

De même, pour tout $b>0$, $\displaystyle\int_{0}^{b} tf(t)\,\mathrm{d}t=G(b)-G(0)$.

Comme $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} G(b)=0$, $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} tf(t)\,\mathrm{d}t=-G(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} tf(t)\,\mathrm{d}t+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} tf(t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

2. On admet le résultat sur l'écart-type. □

III Lois normales

Définition
Soient μ un nombre réel et $\sigma>0$.
Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si et seulement si la variable $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Propriété
Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors son espérance est μ et son écart-type est σ.

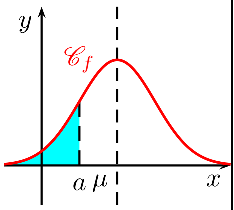
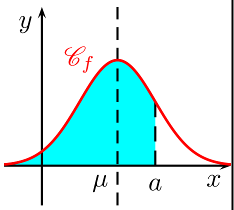
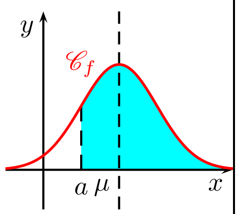
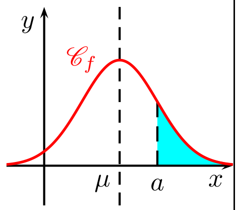
Remarque

1. Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, μ est aussi la médiane car $P(X<\mu)=0,5$ (et $P(X>\mu)=0,5$).
2. Soit f la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.
   La courbe représentative de f est une courbe en cloche symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$, d'autant plus resserrée autour de son axe de symétrie que σ est petit.

Utilisation de la calculatrice

	Casio	Texas
Syntaxe	*Optn*, *STAT* (F5), *DIST* (F3), *NORM* (F1)	*Distrib* (2nde *var*)
$P(a < X < b)$	choisir *Ncd* : `NormCD(a,b,σ,μ)`	`normalFRep(a,b,μ,σ)`
Nombre réel k tel que $P(X < k) = c$	choisir *InvN* : `InvNormCD(c,σ,μ)`	`FracNormale(c,μ,σ)`

Comme pour la loi normale centrée réduite, on peut alors déterminer n'importe qu'elle probabilité du type $P(X > a)$ ou $P(X < a)$.
On utilise là aussi la symétrie de la courbe : $P(X > \mu) = P(X < \mu) = \dfrac{1}{2}$.

Probabilité	$P(X < a)$ pour $a < \mu$	$P(X < a)$ pour $a > \mu$	$P(X > a)$ pour $a < \mu$	$P(X > a)$ pour $a > \mu$
Graphique	 $a < \mu$	 $a > \mu$	 $a < \mu$	 $a > \mu$
Calcul	$\dfrac{1}{2} - P(a < X < \mu)$	$\dfrac{1}{2} + P(\mu < X < a)$	$P(a < X < \mu) + \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2} - P(\mu < X < a)$

Propriété

1. $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.
2. $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.
3. $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 0,997$.

Démonstration
Les trois cas se montrent de la même manière. Montrons le dernier cas.

$$\begin{array}{ll} & \mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma \\ \Leftrightarrow & -3\sigma \leqslant X - \mu \leqslant 3\sigma \\ \Leftrightarrow & -3 \leqslant \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 3 \end{array}$$

Donc $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = P(-3 \leqslant Y \leqslant 3)$ où Y suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$.
Ainsi, en posant $\Phi(t) = P(Y \leqslant t)$,

$$\begin{array}{rcl} P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) & = & P(-3 \leqslant Y \leqslant 3) \\ & = & 2\Phi(3) - 1 \\ & \approx & 0,997 \end{array}$$

à la calculatrice, $\Phi(3) = P(Y \leqslant 3) = \dfrac{1}{2} + P(0 < Y < 3)$. □

IV Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On pose $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{(np(1-p)}$.
μ et σ sont respectivement l'espérance et l'écart-type de X.
On a vu que lorsque n devient très grand, on peut approcher la variable $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite.
Compte tenu de la définition de la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, il est naturel de s'intéresser, pour des grandes valeurs de n, à l'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{(np(1-p)}$.

Un problème :
La variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 045$.
La variable Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{(np(1-p)}$.
Peut-on utiliser Y à la place de X pour calculer des probabilités ?

Étude de ce problème :
On arrondira les résultats au millième le plus proche.

1. Calculer μ et σ.
2. Déterminer $P(X \leqslant 92)$ et $P(X = 92)$.
3. Déterminer $P(Y \leqslant 92)$ et $P(Y \leqslant 92,5)$. Comparer avec le résultat obtenu avec X.
   Le caractère continu de la loi de Y fait que l'on approche $P(X \leqslant 92)$ par $P(Y \leqslant 92,5)$.
4. Que vaut $P(Y = 92)$? Déterminer $P(91,5 < Y < 92,5)$. Comparer avec le résultat obtenu avec X.
   Le caractère continu de la loi de Y fait que l'on approche $P(X = 92)$ par $P(91,5 < Y < 92,5)$.

On admet que dans les conditions suivantes :

$$n \geqslant 30,\ np \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) \geqslant 5,$$

la loi binomiale peut être approchée la la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{(np(1-p)}$.

Exercice 4 (Daltonisme)
Le daltonisme, ou mauvaise vision des couleurs, est une anomalie dont 8 % des hommes sont atteints.

1. Soit X la variable qui, à tout échantillon de 500 hommes pris au hasard dans la population, associe le nombre de ces hommes atteints de daltonisme.
2. X suit une loi binomiale. Indiquer ses paramètres.
3. Montrer que l'on peut approcher la loi de X par une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ que l'on précisera.
4. On note Y une variable suivant cette loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. En utilisant cette approximation, déterminer :
   (a) la probabilité que 39 hommes parmi les 500 soient atteints de daltonisme.
   (b) la probabilité qu'au plus 35 hommes parmi les 500 soient atteints de daltonisme.

Exercice 5 (Surbooking)
Un vol Paris-Nice est asuré par un Airbus de 140 places. La réservation est obligatoire. L'expérience a montré que la probabilité qu'une personne confirme sa réservation et retire son billet est de 0,8. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes ayant confirmé leur réservation et retiré leur billet.

1. La compagnie a accepté 140 réservations.
   (a) Quelle est la loi de X ? Indiquer μ et σ.
   (b) Montrer que l'on peut approcher X par une loi normale.
   Utiliser cette approximation pour estimer la probabilité que plus de 135 personnes confirment leur réservation et retirent leur billet.
2. La compagnie accepte n réservations ($n \geqslant 140$).
   (a) Quelle est la loi de X ? Indiquer μ et σ.
   (b) On admet que l'on peut approcher X par une loi normale. Préciser ses paramètres.
   (c) On note Y une variable suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0,8n$ et d'écart-type $\sigma = 0,4\sqrt{n}$.
   On recherche le nombre de résevations que la compagnie peut accepter sachant qu'elle s'accorde un risque de 5 % de ne pas satisfaire toutes les personnes ayant réservé, c'est-à-dire $P(Y \leqslant 140,5) \geqslant 0,95$.
   Montrer que n est solution de l'inéquation $0,8n + 0,658\sqrt{n} - 140,5 \leqslant 0$.
   (d) En posant $U = \sqrt{n}$, résoudre l'inéquation précédente et en déduire le nombre maximal de réservations que peut accepter la compagnie.

Remarque
2.(c) se traduit par : "la compagnie est prête à tolérer un risque de surbooking de 5 %".