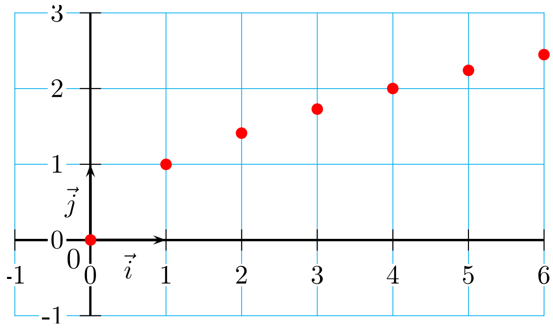
# Chapitre 11 : Suites numériques – 2^e partie
# Variations et notion de limite

## I Suite croissante, suite décroissante

**Définition**
Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels. On dit que :
- la suite $(u_n)$ est croissante si pour tout entier $n$, $u_{n+1} \geqslant u_n$,
- $(u_n)$ est décroissante si pour tout entier $n$, $u_{n+1} \leqslant u_n$,
- $(u_n)$ est constante si pour tout entier $n$, $u_{n+1} = u_n$.
- $(u_n)$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

**Remarque (suite strictement croissante, ou strictement décroissante)**
En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on définit une suite $(u_n)$ strictement croissante, strictement décroissante :
$(u_n)$ est strictement croissante si pour tout entier $n$, $u_{n+1} > u_n$.
$(u_n)$ est strictement décroissante si pour tout entier $n$, $u_{n+1} < u_n$.

Exemple : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est croissante.




**Remarque**
Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.
Par exemple, la suite $(u_n)$ de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.
En effet, si $n$ est pair $u_n = 1$, et si $n$ est impair $u_n = -1$.
Ainsi, $u_0 = u_2 = 1$, et $u_1 = -1$.
Comme $u_1 < u_0$, la suite n'est pas croissante.
Comme $u_2 > u_1$, elle n'est pas non plus décroissante.

**Remarque**
Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, ou pas décroissante, il suffit de donner un contre-exemple.

**Exercice 1**
Montrer que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = 3n^2 - 7n + 1$ n'est ni croissante, ni décroissante.

**Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite**

1. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à $(u_n)$ croissante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ équivaut à $(u_n)$ décroissante.

2. Seulement pour les suites définies par terme général $u_n = f(n)$ (formule explicite), on peut étudier les variations de la fonction $f$ sur $[0; +\infty[$, par exemple en dérivant.
   Si $f$ est croissante sur $[0; +\infty[$, alors $(u_n)$ est croissante.
   Si $f$ est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors $(u_n)$ est décroissante.
3. Dans le cas des suites à termes strictement positifs, on peut aussi former le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1 (utile lorsqu'il y a des puissances).
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $(u_n)$ est croissante.
   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $(u_n)$ est décroissante.

**Exercice 2**
Étudier le sens de variation des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
2. $V_0 = 5$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n - \dfrac{2}{3+n^2}$.
3. Pour tout entier $n$, $W_n = \dfrac{2}{6n+1}$.

# II Suite majorée, suite minorée

**Définition**
On dit qu'une suite $(u_n)$ est majorée s'il existe un nombre $M$ tel que pour tout entier $n$ on ait $u_n \leqslant M$ (le nombre $M$ est un majorant de la suite).
On dit qu'une suite $(u_n)$ est minorée s'il existe un nombre $m$ tel que pour tout entier $n$ on ait $u_n \geqslant m$ ($m$ est un minorant de la suite).
Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

**Remarque**
Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

**Exercice 3**
Montrer que la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par $u_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$ est croissante et majorée par 7. En déduire que $(u_n)$ est bornée et donner un encadrement de $u_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4**
Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1-2n}{n+5}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
2. Justifier qu'elle est minorée par $-2$.

## III Variation des suites arithmétiques et géométriques

**Propriété (variation des suites arithmétiques)**
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.

1. $(u_n)$ est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
2. $(u_n)$ est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
3. $(u_n)$ est constante si et seulement si $r = 0$.

**Démonstration**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ (par définition).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ssi $r > 0$, $(u_n)$ est strictement croissante ssi $r > 0$.
Et $u_{n+1} - u_n < 0$ ssi $r < 0$, $(u_n)$ est strictement décroissante ssi $r > 0$. □

**Remarque**
Une suite arithmétique est donc toujours monotone.
On fait le lien avec le sens de variation des fonctions affines $x \mapsto ax + b$ puisque les suites arithmétiques sont la restriction à $\mathbb{N}$ des fonctions affines.

**Propriété (variation de $(q^n)$)**
Soit $q$ un nombre réel tel que $q \neq 0$ et $q \neq 1$.

1. Si $q > 1$, alors la suite $(q^n)$ est strictement croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors la suite $(q^n)$ est strictement décroissante.
3. Si $q < 0$, alors la suite $(q^n)$ n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).

**Démonstration**
Si $q < 0$, alors la suite $(q^n)$ est alternée (chaque terme est de signe contraire du prédédent), donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.
Sinon, $q > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+1} - q^n = q^n \times q - q^n = q^n(q-1)$.
Si $0 < q < 1$, $q - 1 < 0$, et comme $q > 0$, $q^n > 0$.
Par produit, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1) < 0$, et la suite est strictement décroissante.
Si $q > 1$, alors $q - 1 > 0$, et comme $q > 0$, $q^n > 0$.
Alors, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1) > 0$, et la suite est strictement croissante. □

**Conséquence**
Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$ et différente de 1.

1. Si $q > 1$ alors $(u_n)$ est strictment croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors $(u_n)$ est strictement décroissante.

**Exercice 5**
Étudier le sens de variation des suites suivantes :

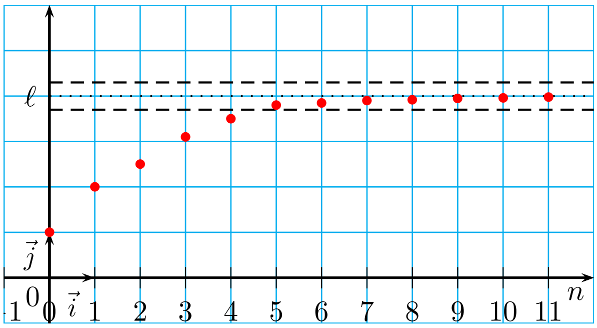
1. $(a_n)$ est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 5$ et de raison $-3$.
2. $(b_n)$ est définie par $b_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = b_n - (n-3)^2$.
3. Pour tout entier $n$, $c_n = n^3 - 9n^2$.
4. $(d_n)$ est la suite géométrique de premier terme $d_0 = 1$ et de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

# IV Notion de limite

## IV.1 Suite convergeant vers un nombre réel $\ell$

**Définition**
Soient $(u_n)$ une suite numérique et $\ell$ un nombre réel.
On dit que $(u_n)$ admet pour limite $\ell$ (ou converge vers $\ell$) lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ (aussi petit soit-il) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = \ell$.

**Illustration :**
Le graphique ci-dessous représente une suite $(u_n)$ qui converge vers $\ell = 4$.
On a illustré en ordonnée un intervalle ouvert contenant 4 : $]3,7;4,3[$.




**Remarque**
$\lim u_n = \ell$ signifie que tous les termes de la suite $u_n$ deviennent "infiniment proches" de $\ell$ lorque $n$ devient très grand.
Il est inutile de préciser $n \to +\infty$ car c'est toujours le cas dans ce chapitre.
On note simplement $\lim u_n = \ell$ pour désigner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

**Théorème (admis)**
Si une suite est convergente, sa limite est unique.

**Remarque**
Il existe des suites qui ne sont pas convergentes (on dit alors divergentes).
La suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite, elle est divergente.

Exemple :
$\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ où $k$ est un entier supérieur où égal à 1 sont des suites convergeant vers 0.

## IV.2 Suites ayant une limite infinie

**Définition**
On dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$ (ou diverge vers $+\infty$) si tout intervalle du type $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = +\infty$.
On dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $-\infty$ (ou diverge vers $-\infty$) si tout intervalle du type $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim u_n = -\infty$.

Exemple :
$\lim n^2 = +\infty$ ; $\lim n^3 = +\infty$ ; $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

# V Recherche de seuil

## V.1 Exemple avec une suite divergeant vers $+\infty$

Exemple :
Considérons la suite $(u_n)$ définie par $u_n = n^2$.
On sait que $(u_n)$ est croissante (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$).
De plus, en calculant quelques termes ($u_{100} = 10000$, $u_{1000} = 1000000 = 10^6$), on peut conjecturer qu'elle diverge vers $+\infty$.
On cherche le plus petit entier $n$ tel que $n^2 \geqslant 10^7$.
On utilise un algorithme de seuil.

Langage naturel

```
n prend la valeur 0
U prend la valeur n^2
Tant que U < 10^7,
   n prend la valeur n + 1
   U prend la valeur n^2
Fin Tant que
Afficher n
```

Fonction Python associée

```
def seuil():
   n=0
   U=n**2
   while U<10**7:
      n=n+1
      U=n**2
   return(n)
```

On obtient $N = 3163$.
Cela signifie que le plus petit entier $n$ tel que $n^2 \geqslant 10^7$ est $n = 3163$.
En outre comme la suite $(n^2)$ est croissante, on peut affirmer que pour tout $n \geqslant 3163$, $n^2 \geqslant 10^7$.
Les entiers $n$ pour lesquels $n^2 \geqslant 10^7$ sont donc tous les entiers à partir de 3163.

**Remarque**
Sur cet exemple (simple), on pouvait aussi résoudre l'inéquation $n^2 \geqslant 10^7$.
Comme $n$ est un entier positif, cela implique $n \geqslant \sqrt{10^7} \approx 3162,3$.
Le plus petit entier qui convient est donc 3163.

**Commentaire**
De façon générale, dans un algorithme de seuil, on utilise une boucle non bornée (Tant que), et la condition du test est la négation de la condition demandée dans la question.
Sur l'exemple précédent, on cherche le plus petit entier $n$ tel que $n^2 \geqslant 10^7$, et dans l'algorithme, Tant que $U < 10^7$.

**Exercice 6**
Considérons la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n \times \sqrt{n}$.

1. Montrer que $(u_n)$ est croissante.
2. On admet que $\lim u_n = +\infty$.
   Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^4$.
3. Programmer l'algorithme à la calculatrice ou Python et donner la valeur de $n_0$.

## V.2 Exemple avec une suite convergente

**Exercice 7**
On considère la suite $(A_n)$ définie par $A_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $A_{n+1} = \dfrac{1}{3}A_n + 4$.

1. Calculer $A_1$ et $A_2$.
2. On admet que la suite $(A_n)$ converge vers 6.
   (a) Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier $n_0$ tel que $|A_{n_0} - 6| < 10^{-7}$.
   (b) Programmer l'algorithme à la calculatrice ou Python et indiquer la valeur de $n_0$.

**Remarque**
L'inégalité $|A_n - 6| < 10^{-7}$ signifie que l'écart entre $A_n$ et 6 est strictement inférieur à $10^{-7}$ (la valeur absolue permet de ne pas se soucier de savoir si $A_n$ est plus grand ou plus petit que 6).