1G. Correction du devoir n° 8.

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 45n - 1 + \sqrt{n}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 45 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   $u_{n+1} - u_n = 45(n+1) - 1 + \sqrt{n+1} - (45n - 1 + \sqrt{n})$
   $= 45n + 45 - 1 + \sqrt{n+1} - 45n + 1 - \sqrt{n} = 45 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. En déduire que (u_n) est croissante.
   Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$, et en ajoutant $45>0$, il vient $u_{n+1} - u_n > 0$.
   Donc (u_n) est strictement croissante.
3. On admet que (u_n) diverge vers $+\infty$.
   (a) Compléter la fonction Python qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^4$.

```
from math import sqrt
def seuil():
    n=0
    while 45*n-1+sqrt(n)<10**4 :
        n=n+1
    return(n)
```

4. Peut-on affirmer que pour tout entier $n \geqslant 285$, $u_n \geqslant 10^4$? Justifier.
   On obtient $n = 222$ en faisant tourner l'algorithme.
   Avec la calculatrice, il suffit d'observer que $u_{222} \geqslant 10^4$.
   Ensuite, comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant 222$, $u_n \geqslant u_{222} \geqslant 10^4$, donc $u_n \geqslant 10^4$.
   Donc l'affirmation est vraie.

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. (a) Calculer $f'(x)$, la dérivée de f.
   f est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-10; 10]$.
   Pour tout $x \in [-10; 10]$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

   (b) Déterminer le tableau de variation de f sur $[-10; 10]$.
   On étudie le signe de $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 4 \times 3 \times 9 = 144 = 12^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 - 12}{6} = -1$.
   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + 12}{6} = 3$.
   Le trinôme $f'(x)$ prend le signe de a à l'extérieur des racines (ici $a = 3 > 0$).

x	-10		-1		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1209	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	611

   On trouve les images avec la calculatrice.

   (c) En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-10; 10]$.
   D'après la question précédente, sur $[-10; 10]$, le minimum de f est -1209 et le maximum est 611.
   Donc pour tout $x \in [-10; 10]$, $-1209 \leqslant f(x) \leqslant 611$.

2. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ces points.
   La tangente T au point d'abscisse x est parallèle à la droite d'équation $y = -9x+2$ ssi T a pour coefficient directeur -9 ssi $f'(x) = -9$ ssi $3x^2 - 6x = 0$ ssi $x(3x - 6) = 0$ ssi $(x = 0$ ou $x = 2)$.
   $f(0) = 1$ et $f(2) = -21$.
   Il y a deux points en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -9 et est donc parallèle à cette droite.
   Ce sont les points $A(0; 1)$ et $B(2; -21)$.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ de f au point d'abscisse 1.
   $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
   $f(1) = 1 - 3 - 9 + 1 = -10$.
   $f'(1) = 3 - 6 - 9 = -12$.
   D'où $y = -12(x - 1) - 10 = -12x + 2$.
   Une équation de T_1 est $y = -12x + 2$.

Exercice 3 (5 points)

Le but de l'exercice est de démontrer que tous les rectangles d'aire égale à 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

1. On note $x > 0$ la mesure d'un côté d'un rectangle d'aire 100. Quelle est l'autre dimension du rectangle ?
   Notons y l'autre dimesion. L'aire du rectangle est $x \times y$.
   Donc $xy = 100$, puis $y = \dfrac{100}{x}$.
   L'autre dimension du rectangle est $\dfrac{100}{x}$.
2. Montrer que le périmètre du rectangle est $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$.
   Le périmètre est donc
   $P(x) = 2x + 2y = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right) = 2x + \dfrac{200}{x}$.
3. Calculer $P'(x)$ pour tout $x > 0$.
   Pour tout $x > 0$,
   $P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2} = \dfrac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$.
4. Déterminer le tableau de variation de P sur $]0;+\infty[$.
   Comme on travaille sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $x > 0$,
   et donc $x + 10 > 0$.
   Et comme $x^2 > 0$ et $2 > 0$, $P'(x)$ a le même signe que $x - 10$.

x	0		10		$+\infty$
$P'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$\Vert$	$\searrow$	40	$\nearrow$	

   $P(10) = 2 \times 10 + \dfrac{200}{10} = 40$.
5. Que peut-on conclure ?
   D'après les variations, le périmètre est au minimum de 40, et ce minimum est obtenu lorsque $x = 10$.
   Note : le rectangle est alors un carré puisque $y = \dfrac{100}{x} = 10$.

Exercice 4 (4 points + 1 bonus)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On lâche une balle d'une hauteur de 2 m.
   On admet que la hauteur de chaque rebond diminue de 38 % par rapport au précédent.
   On pose $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$ on note u_n la hauteur du $n^{\text{ième}}$ rebond.
   (a) Vérifier que $u_1 = 1,24$.
   Diminuer de 38 % revient à multiplier par $1 - 0,38 = 0,62$.
   $u_1 = 2 \times 0,62 = 1,24$.
   (b) Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.
   On a $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,62u_n$ (suite géométrique, avec $q = 0,62$).

```
def seuil():
    n=0
    u=2
    while u>=0.001:
        n=n+1
        u=u*0.62
    return(n)
```

   (c) On considère que la balle devient immobile dès que la hauteur du rebond devient inférieure à 1 mm.
   Combien y a t-il eu de rebonds ? Justifier.
   La suite est décroissante (car c'est une suite géométrique avec $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$). 1 mm =0,001 m.
   Avec la calculatrice, on obtient $u_{15} \approx 0,0015 > 10^{-3}$, et $u_{16} \approx 0,00095 < 10^{-3}$.
   Avec le postulat posé, il y a donc eu 15 rebonds.
2. Bonus.
   On pose $V_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 3V_n + 5$.
   Écrire une fonction Python d'argument n (n entier naturel non nul) qui renvoie $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

```
def somme(n):
    V=4
    S=V
    for k in range(1,n+1) :
        V=3*V+5
        S=S+V
    return(S)
```