

Chapitre 2 : Suites numériques (1^{ère} partie)

I Généralités sur les suites

Définition

Une suite numérique (on dit aussi une suite réelle) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation : (u_n) $\begin{matrix} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{matrix}$.

Le nombre réel u_n est appelé terme d'indice n de la suite (u_n) .

Remarque (importante)

Il y a notamment deux façons de définir une suite réelle :

Par son terme général (formule explicite) : il y a une formule qui donne u_n en fonction de n : $u_n = f(n)$.

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Alors, $u_0 =$

Par récurrence : il y a une formule qui permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent (ou des termes précédents).

Par exemple, on a relation du type pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Il suffit de donner alors la valeur du premier terme pour que la suite soit entièrement définie.

Exemple :

On donne le premier terme $u_0 = 3$ et la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n - 2$.

Alors, $u_1 =$

Dans tous les cas, la suite peut être définie seulement à partir d'un certain rang n_0 .

Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = \sqrt{n - \pi}$ est définie pour $n \geq 4$.

Exercice 1 (premier exemple de suite récurrente)

On considère la suite de nombres suivants :

- le premier terme noté u_0 vaut 2.
 - Chaque terme est obtenu à partir du précédent en le multipliant par deux puis en soustrayant 1.
1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
 2. Pour tout entier naturel n , proposer une relation entre u_{n+1} et u_n .
 3. En s'aidant de la calculatrice, donner u_{20} , u_{30} .
 4. Conjecturer une formule permettant de calculer u_n connaissant n .

Exercice 2

Dans chaque cas, calculer les premiers termes jusqu' u_4 .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 3}$
2. $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 - 7u_n$.
3. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n^2 + 1$
4. $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 - 5n$

Calcul de termes à la calculatrice

Pour une suite définie par son terme général, on peut utiliser le mode fonction et la table ajustée sur des entiers.

Le menu "suite" ou "récurrence" est surtout intéressant pour les suites définies par récurrence.

	Casio	Texas	Numworks
Chemin	menu recurrence	mode, suite, f(x)	Menu suite

Exercice 3 (suite récurrente à deux pas)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - (u_n)^2$.

1. Calculer u_2 puis u_3 .
2. Utiliser la calculatrice pour donner u_{10} .

II Algorithme de calcul de terme

II.1 Rappel sur les boucles bornées en Python

Boucle bornée en Python

Soient d, n des entiers naturels, $(d < n)$.

L'instruction `for k in range(n)` fait parcourir à la variable k les entiers de 0 à $(n - 1)$. Il y a alors n tours de boucle.

L'instruction `for k in range(d,n)` fait parcourir à k les entiers de d à $n - 1$. Il y a alors $(n - d)$ tours de boucle.

Remarque

En particulier, l'instruction "Pour k variant de 1 à n " se traduit en Python par `"for k in range(1,n+1):"`

Exercice 4

Compléter le tableau.

Instruction Python	Valeurs prises par k	Nombre de tours
<code>for k in range(8)</code>		
<code>for k in range(1,16)</code>		
<code>for k in range(0,6)</code>		
<code>for k in range(2,11)</code>		
	5,6,7,8	
	11, 12, ..., 39	

II.2 Algorithme de calcul de terme d'une suite récurrente

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6 \end{cases}$$

1. Écrire un algorithme qui renvoie le nombre u_n lorsque l'on entre l'entier n .
En langage courant,
Entrer N
 $U \leftarrow 5$
Pour K allant de 1 à N
 $U \leftarrow 2U+6$
FinPour
Afficher U
2. Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie u_n pour un entier n donné.

```
def Terme(n) :  
    u=...  
    for k in range(..., ...):  
        ...  
    return(u)
```
3. Programmer la fonction et donner u_{10} .
On obtient $u_{10} = 11\,258$.

III Suite croissante, suite décroissante

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- la suite (u_n) est croissante si pour tout entier n , $u_{n+1} \geq u_n$,
- (u_n) est décroissante si pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$,
- (u_n) est constante si pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

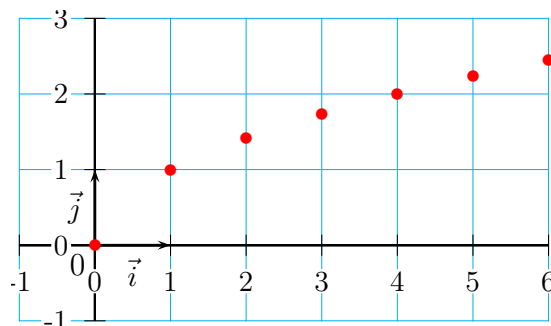
Remarque (suite strictement croissante, ou strictement décroissante)

En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on définit une suite (u_n) strictement croissante, strictement décroissante :

(u_n) est strictement croissante si pour tout entier n , $u_{n+1} > u_n$.

(u_n) est strictement décroissante si pour tout entier n , $u_{n+1} < u_n$.

Exemple : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \sqrt{n}$ est croissante.



Remarque

Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Par exemple, la suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

En effet, si n est pair $u_n = 1$, et si n est impair $u_n = -1$.

Ainsi, $u_0 = u_2 = 1$, et $u_1 = -1$.

Comme $u_1 < u_0$, la suite n'est pas croissante.

Comme $u_2 > u_1$, elle n'est pas non plus décroissante.

Remarque

Pour montrer qu'une suite n'est pas croissante, ou pas décroissante, il suffit de donner un contre-exemple.

Exercice 6

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n^2 - 7n + 1$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite

1. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à (u_n) croissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ équivaut à (u_n) décroissante.
2. Seulement pour les suites définies par terme général $u_n = f(n)$ (formule explicite), on peut étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$, par exemple en dérivant.
Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Exercice 7

Étudier le sens de variation des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.
2. $V_0 = 5$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n - \frac{2}{3 + n^2}$.
3. Pour tout entier n , $W_n = \frac{2}{6n + 1}$.

IV Suite majorée, suite minorée

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est majorée s'il existe un nombre M tel que pour tout entier n on ait $u_n \leq M$ (le nombre M est un majorant de la suite).

On dit qu'une suite (u_n) est minorée s'il existe un nombre m tel que pour tout entier n on ait $u_n \geq m$ (m est un minorant de la suite).

Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Remarque

Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Exercice 8

Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{7n - 1}{n + 2}$ est croissante et majorée par 7. En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1 - 2n}{n + 5}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Justifier qu'elle est minorée par -2 .