2de. Correction de l'interrogation n° 2. Sujet 1

Exercice 1 (5 points)

1. Résoudre l'équation $-2x+5=-4x$.

   $-2x+5=-4x$ ssi $5=-2x$ ssi $x=-\dfrac{5}{2}$ $\boxed{S=\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}}$.

2. Résoudre l'inéquation suivante, puis donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle. $\dfrac{x-5}{6}>3x+\dfrac{1}{2}$.
   En multipliant par 6>0 membre à membre, le sens est conservé.
   $\dfrac{x-5}{6}\times 6>(3x+\dfrac{1}{2})\times 6$.

   Donc $x-5>18x+3$, puis $17x<-8$, et enfin $x<-\dfrac{8}{17}$. $\boxed{S=\left]-\infty;-\dfrac{8}{17}\right[}$

3. Calculer en détaillant les étapes, et mettre sous forme de fraction irréductible. $a=6-\dfrac{4}{5}\div\dfrac{6}{25}$.
   $a=6-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{25}{6}=6-\dfrac{2\times 2\times 5\times 5}{5\times 2\times 3}=6-\dfrac{10}{3}=\dfrac{18}{3}-\dfrac{10}{3}=\dfrac{8}{3}$

Exercice 2 (4 points)

1. Montrer que le nombre $\dfrac{2}{3}+\dfrac{29}{6}$ est un nombre décimal.
   $\dfrac{2}{3}+\dfrac{29}{6}=\dfrac{4}{6}+\dfrac{29}{6}=\dfrac{33}{6}=\dfrac{3\times 11}{3\times 2}=\dfrac{11}{2}=\dfrac{55}{10^1}$. $\boxed{\text{C'est un nombre décimal.}}$
   Ou bien, $\dfrac{2}{3}+\dfrac{29}{6}=\dfrac{11}{2}=5,5$.
   Il a un développement décimal fini, donc c'est un nombre décimal.
2. Le nombre $(3-\sqrt{13})\times(3+\sqrt{13})$ est-il un entier ? Justifier.
   $(3-\sqrt{13})\times(3+\sqrt{13})=3^2-\sqrt{13}^2=9-13=-4\in\mathbb{Z}$.
   $\boxed{\text{C'est bien un entier relatif.}}$
3. Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier compris entre -3 et 0. Aucune justification n'est attendue. $\boxed{\text{Le nombre } -1,7 \text{ convient.}}$
4. Donner un exemple de nombre rationnel mais pas décimal appartenant à l'intervalle $[1;2]$. Aucune justification n'est attendue. $\boxed{\text{Le nombre } \dfrac{4}{3} \text{ convient.}}$
5. Donner un exemple de nombre irrationnel appartenant à l'intervalle $[4;5]$. Aucune justification n'est attendue. $\boxed{\text{Le nombre } \pi+1 \text{ convient.}}$

Exercice 3 (1 point)

On admet que $\sqrt{23}\approx 4,795\,832\,523$.

1. L'arrondi à 10^{-3} près de $\sqrt{23}$ est $\boxed{4,796}$
2. Un encadrement d'amplitude 10^{-5} de $\sqrt{23}$ est : $\boxed{4,795\,83<\sqrt{23}<4,795\,84}$

Exercice 4 (3 points)

Compléter le tableau suivant. Aucune justification n'est demandée.

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles
$-7\leqslant x\leqslant 1$	$[-7;1]$
$x>-1$	$]-1;+\infty[$
$x<0$ ou $x\geqslant 4$	$]-\infty;0[\cup[4;+\infty[$

Exercice 5 (2 points)

On considère les intervalles $I=[6;10]$ et $J=]-\infty;7[$.

Donner $I\cap J$ et $I\cup J$. $\boxed{I\cap J=[6;7[. \text{ et } I\cup J=]-\infty;10].}$

Exercice 6 (3 points)

1. Résoudre l'équation $|x-4|=11$. $x=4-11=-7$ ou $x=4+11=15$
   $\boxed{S=\{-7;15\}}$
2. Résoudre l'inéquation $|x+3|>4$. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.
   $d(x;-3)>4$ ssi ($x<-7$ ou $x>1$) $\boxed{S=]-\infty;-7[\cup]1;+\infty[}$

Exercice 7 (2 points)

La facture d'eau d'un jardinier s'élève à 545 € par an. Il prévoit d'économiser 55 € par an en installant un récupérateur d'eau de pluie. Le récupérateur coûte 199 € à l'achat et va nécessiter chaque année 13 € pour l'entretien (nettoyage, tuyau...). On cherche à déterminer le nombre d'années à partir duquel l'installation devient rentable.

1. Notons x le nombre d'années.
   Montrer que l'intallation est rentable lorsque $199+503x\leqslant 545x$.
   Sans l'achat, la dépense en eau au bout de x années est $545\times x$.
   Avec l'achat, la dépense en eau au bout de x années est donnée par :
   $199+545x-55x+13x=199+x(545-55+13)=199+503x$.
   L'achat est donc rentable lorsque $199+503x\leqslant 545x$.
2. Résoudre alors l'inéquation et répondre au problème.
   $199+503x\leqslant 545x$ ssi $545x-503x\geqslant 199$ ssi $42x\geqslant 199$ ssi $x\geqslant\dfrac{199}{42}\approx 4,7$.
   $\boxed{\text{L'achat devient rentable à partir de la 5}^{\text{e}}\text{ année.}}$

Exercice 8 (bonus, 1 point)

On considère le nombre rationnel $A=0,272\,727\,\underline{27}\dots$ (le développement décimal est infini de période $\underline{27}$).
Mettre A sous forme de fraction irréductible.
Indication : on pourra montrer que $100A-27=A$.
$100A-27=27,\underline{27}\cdots-27=0,\underline{27}\cdots=A$.

Donc $99A=27$, et $A=\dfrac{27}{99}=\dfrac{9\times 3}{9\times 11}=\dfrac{3}{11}$. $\boxed{A=\dfrac{3}{11}}$

2de. Correction de l'interrogation n° 2. Sujet 2

Exercice 9 (5 points)

1. Résoudre l'équation $1 - x = 7x + 4$.

   $1 - x = 7x + 4$ ssi $-3 = 8x$ ssi $x = -\dfrac{3}{8}$. $\boxed{S = \left\{-\dfrac{3}{8}\right\}}$

2. Résoudre l'inéquation suivante, puis donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle. $\dfrac{2x+3}{6} > x - \dfrac{7}{3}$.

   En multipliant par 6>0 membre à membre, le sens est conservé.

   Donc $2x + 3 > 6x - \dfrac{7 \times 3 \times 2}{3}$, soit $2x + 3 > 6x - 14$, puis $-4x < -17$.

   Enfin, en divisant par $-4 < 0$, on change le sens de l'inégalité. Donc $x > \dfrac{17}{4}$.

   $\boxed{S = \left]\dfrac{17}{4}; +\infty\right[.}$

3. Calculer en détaillant les étapes, et mettre sous forme de fraction irréductible. $a = 10 - \dfrac{15}{4} \div \dfrac{5}{6}$

   $a = 10 - \dfrac{15}{4} \times \dfrac{6}{5} = 10 - \dfrac{3 \times 5 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 5} = 10 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{20}{2} - \dfrac{9}{2} = \dfrac{11}{2}$.

Exercice 10 (4 points)

1. Montrer que le nombre $\dfrac{59}{6} - \dfrac{4}{3}$ est un nombre décimal.

   $\dfrac{59}{6} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{59}{6} - \dfrac{8}{6} = \dfrac{51}{6} = \dfrac{3 \times 17}{3 \times 2} = \dfrac{17}{2} = \dfrac{17 \times 5}{10} = \dfrac{85}{10^1}$.

   $\boxed{\text{C'est donc un nombre décimal.}}$

2. Le nombre $(4 - \sqrt{11}) \times (4 + \sqrt{11})$ est-il un entier relatif ? Justifier.

   $(4 - \sqrt{11}) \times (4 + \sqrt{11}) = 4^2 - \sqrt{11}^2 = 16 - 11 = 5 \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{C'est un nombre entier naturel.}}$

3. Donner un exemple de nombre décimal mais pas entier compris entre -4 et -3. $\boxed{-3,08 \text{ convient.}}$

4. Donner un exemple de nombre rationnel mais pas décimal appartenant à l'intervalle $[-1; 0]$. $\boxed{-\dfrac{1}{3} \text{ convient.}}$

5. Donner un exemple de nombre irrationnel appartenant à l'intervalle $[2; 3]$.

   $\boxed{\pi - 1 \text{ convient, } \sqrt{5} \text{ aussi.}}$

Exercice 11 (1 point)

Donner l'arrondi à 10^{-3} et un encadrement d'amplitude 10^{-5} de $\sqrt{11}$.

Avec la calculatrice, $\sqrt{11} \approx 3,316\,624\,79$.

L'arrondi à 10^{-3} près de $\sqrt{11}$ est $3,317$.
Un encadrement d'amplitude 10^{-5} est $3,316\,62 < \sqrt{11} < 3,316\,63$.

Exercice 12 (3 points)

Compléter le tableau suivant. Aucune justification n'est demandée.

Inégalité	Intervalle ou réunion d'intervalles
$3 < x \leqslant 8$	$]3; 8]$
$x \geqslant -2$	$[-2; +\infty[$
$x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 5$	$]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$

Exercice 13 (2 points)

On considère les intervalles $I = [0; 9]$ et $J =]-\infty; 5[$.

Donner $I \cap J$ et $I \cup J$. $\boxed{I \cap J = [0; 5[, \text{ et } I \cup J =]-\infty; 9].}$

Exercice 14 (3 points)

1. Résoudre l'équation $|x - 2| = 17$.

   $d(x; 2) = 17$. $\boxed{S = \{-15; 19\}}$

2. Résoudre l'inéquation $|x + 9| > 5$. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

   $d(x; -9) > 5$. $\boxed{S =]-\infty; -14[\cup]-4; +\infty[}$

Exercice 15 (2 points)

La facture d'eau d'un jardinier s'élève à 515 € par an. Il prévoit d'économiser 45 € par an en installant un récupérateur d'eau de pluie. Le récupérateur coûte 175 € à l'achat et va nécessiter chaque année 11 € pour l'entretien (nettoyage, tuyau). On cherche à déterminer le nombre d'années à partir duquel l'installation devient rentable.

1. Notons x le nombre d'années.
   Montrer que l'intallation est rentable lorsque $175 + 481x \leqslant 515x$.
   Sans l'achat, la dépense en eau au bout de x années est $515 \times x$.
   Avec l'achat, la dépense en eau au bout de x années est donnée par :
   $175 + 515x - 45x + 11x = 175 + x(515 - 45 + 11) = 175 + 481x$.
   L'achat est donc rentable lorsque $175 + 481x \leqslant 515x$.

2. Résoudre alors l'inéquation et répondre au problème.

   $175 + 481x \leqslant 515x$ ssi $175 \leqslant 515x - 481x$ soit $34x \geqslant 175$, et $x \geqslant \dfrac{175}{34} \approx 5,15$.

   $\boxed{\text{L'achat devient rentable à partir de la 6}^{\text{e}} \text{ année.}}$

Exercice 16 (bonus, 1 point)

On considère le nombre rationnel $A = 0,848\,484\,\underline{84}\ldots$ (le développement décimal est infini de période $\underline{84}$).

Mettre A sous forme de fraction irréductible.

Indication : on pourra montrer que $100A - 84 = A$.

$100A - 84 = 84,\underline{84} - 84 = 0,\underline{84} = A$.

Donc $99A = 84$, $A = \dfrac{84}{99} = \dfrac{3 \times 28}{3 \times 33} = \dfrac{28}{33}$. $\boxed{A = \dfrac{28}{33}}$