**Seconde. Interrogation de mathématiques n° 10**
**Correction du Sujet 1**

### Exercice 1 (cours, 2 points)

Compléter sur l'énoncé.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $\boxed{xy' - yx' = 0}$.
2. Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan, avec $A \neq B$ et $C \neq D$.
   $(AB)//(CD)$ si et seulement si $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires.}}$
3. Trois points $A$, $B$ et $C$ du plan sont alignés si et seulement si $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}}$

### Exercice 2 (1 point)

Donner le tableau de variation de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

### Exercice 3 (1 point)

Dans un repère orthonormé du plan, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Compléter sans justifier.

1. Les coordonnées du vecteur $3\vec{u} - \vec{v}$ sont $\boxed{(0; -4)}$
2. La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{5}}$

### Exercice 4 (2 points)

On se place dans un repère du plan.

Étudier si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 60 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - yx' = \dfrac{1}{3} \times 60 - (-2) \times (-4) = 20 - 8 = 12 \neq 0.$

$\boxed{\text{Donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}}$

### Exercice 5 (4 points)

Dans un repère du plan, on donne les points $A(-1; -2)$, $B(2; -1)$, $C(4; 2)$, et $D(5; 7)$.

1. Les droites $(AD)$ et $(BC)$ sont-elles parallèles ? Justifier.
   $(AD)//(BC)$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5+1 \\ 7+2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.
   De même, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2+1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   On peut remarquer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$.
   Sinon, $\det(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}) = xy' - yx' = 6 \times 3 - 9 \times 2 = 18 - 18 = 0$.
   Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
   $\boxed{\text{Les droites } (AD) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles.}}$
2. Soit $a$ un nombre réel, on pose le point $K(-2; a)$. Déterminer $a$ pour que $K$ appartienne à la droite $(BC)$.
   $K \in (BC)$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} x_K - x_B \\ y_K - y_B \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -2-2 \\ a-(-1) \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix} -4 \\ a+1 \end{pmatrix}$.
   On a déjà vu que $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} K \in (BC) \quad &\text{ssi} \quad \det(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BK}) = 0 \\ &\text{ssi} \quad 2(a+1) - 3 \times (-4) = 0 \\ &\text{ssi} \quad 2a + 2 + 12 = 0 \\ &\text{ssi} \quad a = -7 \end{aligned}$$

$\boxed{K \in (BC) \text{ ssi } a = -7.}$

**Exercice 6 (4 points)**

1. Résoudre les équations suivantes (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $x^2 = -1$
   Un carré est toujours positif.
   $\boxed{\text{Il n'y a pas de solution réelle.}}$
   (b) $x^2 = 7$ $\boxed{\text{Les solutions sont } \sqrt{7} \text{ et } -\sqrt{7}}$
2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de $x^2$ (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $-3 < x < -2$
   La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
   Donc $(-3)^2 > x^2 > (-2)^2$, soit $9 > x^2 > 4$.
   $\boxed{4 < x^2 < 9}$
   (b) $-3 \leqslant x \leqslant 2$
   La fonction carré n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3; 2]$.

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $9$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ |

   Sur cet intervalle, son minimum est 0 et son maximum est 9.
   $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$
   (c) $5 \leqslant x \leqslant 8$
   La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   Donc $5^2 \leqslant x^2 \leqslant 8^2$.
   $\boxed{25 \leqslant x^2 \leqslant 64}$

**Exercice 7 (2 points)**

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

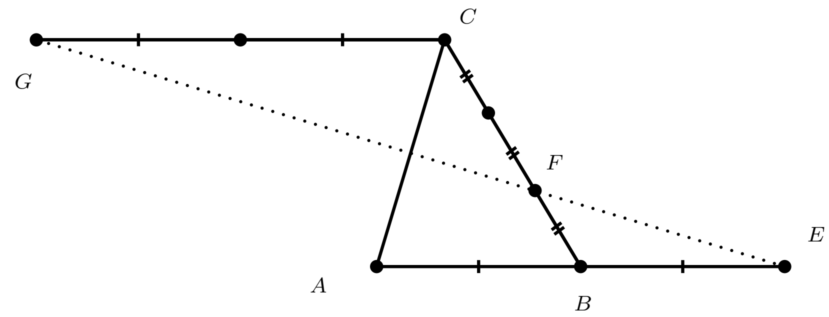
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x < 5$, alors $x^2 < 25$.
   Faux. Contre-exemple avec $x = -7$.
   En effet, $-7 < 5$ et pourtant $(-7)^2 = 49 \geqslant 25$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x > 5$, alors $x^2 > 25$.
   Vrai. La fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   Pour tous $a$, $b$ réels de $[0; +\infty[$, si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.
   Avec $a = 5$, et $b = x$, on obtient le résultat.

**Exercice 8 (4 points)**

Soit $ABC$ un triangle. On définit les points $E$, $F$, $G$ par les relations :

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{AB}$.

1. Faire une figure.




2. Montrer que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

3. Exprimer $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \\ &= -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

4. En déduire que les points $E$, $F$ et $G$ sont alignés.
   D'après 1. et 2., on a $\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF}$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{Eg}$ sont colinéaires.
   $\boxed{\text{Les points } E, F, \text{ et } G \text{ sont alignés.}}$