Chapitre 9 : Applications du produit scalaire

I Produit scalaire et normes

Propriété (Identités remarquables)

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) =$..

....

On procède de façon analogue pour les deux autres identités remarquables, en utilisant la linéarité du produit scalaire.

Remarque

On reconnaît dans les deux premières identités les expressions du produit scalaire avec les normes, il suffit d'isoler $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour s'en convaincre.

Exemple avec la première identité remarquable :

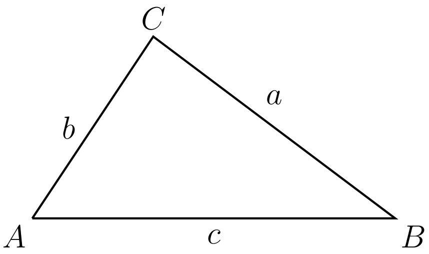
....

....

....

II Formule d'Al-Kashi et relations dans le triangle

Soit ABC un triangle quelconque, on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.



Théorème (Relation d'Al-Kashi)

Pour tout triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Démonstration

....

....

....

....

Théorème (Formule des aires, hors programme)
En notant $\mathcal{S}$ l'aire du triangle ABC, on a

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Démonstration
Notons H le pied de la hauteur issue de C dans ABC. Alors, $\mathcal{S} = \dfrac{1}{2}AB \times CH$.
Faire deux dessins (voire trois, suivant que $\widehat{A}$ est aigu, obtus ou droit).
Dans chaque cas, $CH = CA \times \sin(\widehat{A})$, d'où le résultat :
$\mathcal{S} = \dfrac{1}{2}AB \times AC\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}bc\sin(\widehat{A})$. □

Théorème (Formule des sinus, hors programme)
Avec les mêmes notations, pour tout triangle ABC non aplati on a :

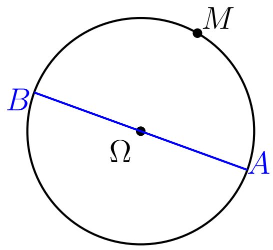
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Démonstration
Lorsque le triangle n'est pas aplati, d'après la formule des aires,
$2\mathcal{S} = bc\sin\widehat{A} = ab\sin\widehat{C} = ac\sin\widehat{B}$
D'où $\dfrac{abc}{2\mathcal{S}} = \dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$. □

III Cercle défini par un diamètre

Théorème (Cercle défini par un diamètre)
Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Démonstration
Soit O le centre du cercle de diamètre $[AB]$, soit M un point quelconque du plan.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = MO^2 + \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = MO^2 + 0 - OA^2 = MO^2 - OA^2$.
Ainsi M appartient au cercle ssi $OM = OA$ ssi $OM^2 = OA^2$ ssi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. □



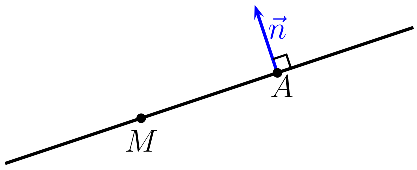
Propriété
Soient A et B deux points distincts, notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Un point M distinct de A et B appartient à $\mathscr{C}$ ssi le triangle ABM est rectangle en M.

IV Droite définie par un vecteur normal et un point

Définition
Un vecteur normal à une droite $\mathcal{D}$ est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Propriété
La droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble de tous les points M vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



Théorème (Équation de droite)
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de coordonnées $\vec{n}(a, b)$ dans un repère orthonormé.
Une droite admet $\vec{n}$ pour vecteur normal si et seulement si elle a une équation du type :

$$ax + by + c = 0$$

Démonstration
Notons $A(\alpha; \beta)$ un point de $\mathscr{D}$. Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.
$\overrightarrow{AM}(x - \alpha; y - \beta)$ et $\vec{u}(a; b)$.
Alors,

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + (-a\alpha - b\beta) = 0 \end{aligned}$$

Remarque
On retiendra que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ admet :

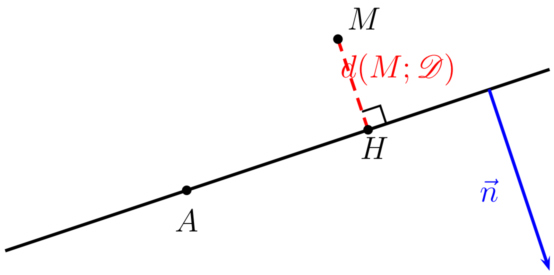
— pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

— pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement que ces deux vecteurs sont orthogonaux : $\vec{n} \cdot \vec{u} = ab - ab = 0$.

Théorème (distance d'un point à une droite)
Dans un repère orthonormé, la distance du point $M(x_0; y_0)$ à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par :

$$d(M; \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Démonstration

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.

La distance $d(M;\mathscr{D})$ est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

Considérons un point $A(x;y)$ quelconque sur $\mathscr{D}$.

D'après la formule du projeté, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} &= a(x_0 - x) + b(y_0 - y) \\ &= ax_0 + by_0 - ax - by \end{aligned}$$

Comme $A(x;y) \in \mathscr{D}$, $ax + by + c = 0$, soit, $-ax - by = c$.

Donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = ax_0 + by_0 + c$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}| &= MH \times ||\vec{n}|| \\ &= MH \times \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

On a bien $(a;b) \neq (0;0)$, ce qui permet d'isoler MH.

$MH = \dfrac{|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ainsi, $d(M;\mathscr{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exercice 1

Dans un repère orthonormé, soient $A(2;-3)$ et $\vec{n}(-1;4)$.

1. Déterminer une équation de la droite d_1 passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

   Méthode 1

   Par propriété, comme $\vec{n}(-1;4)$ est normal à d_1, d a une équation de la forme $-x + 4y + c = 0$, avec $c \in \mathbb{R}$ qui reste à déterminer.

   Comme $A(2;-3) \in d$, on a $-2 + 4 \times (-3) + c = 0$, soit $c = 14$.

   d a pour équation $-x + 4y + 14 = 0$.

   Méthode 2

   Soit $M(x;y)$ un point du plan.

   $M \in d$ ssi $\overrightarrow{AM}(x-2;y+3)$ et $\vec{n}(-1;4)$ sont orthogonaux.

   $M \in d$ ssi $-(x-2) + 4(y+3) = 0$

   $M \in d$ ssi $-x + 4y + 14 = 0$.

   Donc d a pour équation $-x + 4y + 14 = 0$.

2. Soit d_2 la droite d'équation $3x + y - 6 = 0$.

   Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de d_2.

   $\vec{n}(3;1)$ est normal à d_2, et $\vec{u}(-1;3)$ dirige d_2.

   On peut facilement vérifier que $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

3. Calculer la distance du point A à la droite d_2.

   On a $A(2;-3)$, et $d_2 : 3x + y - 6 = 0$. D'après la formule de la distance d'un point à une droite,

   $dist(A;d_2) = \dfrac{|3 \times 2 + (-3) - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{|-3|}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

V Équation de cercle

Théorème (Équation de cercle)
Dans un repère orthonormé, le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Démonstration
$M \in \mathcal{C}$ signifie que $\Omega M = r$, ce qui équivaut à $\Omega M^2 = r^2$.
D'où $M(x, y) \in \mathcal{C} \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ □

Exercice 2 (corrigé)
On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. Donner une équation du cercle de centre $A(3;7)$ et de rayon 2.
   D'après la propriété, une équation de ce cercle est $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 2^2$, soit $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 4$.
   On peut développer bien sûr (facultatif). Une autre équation de ce cercle est alors $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 = 4$, ou $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 54 = 0$.
2. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(-1;2)$ et de rayon $\sqrt{7}$. En déduire les éventuels points d'intersection de ce cercle avec l'axe des ordonnées.
   Une équation de ce cercle est $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 7$.
   Un point $M(x;y)$ appartient à l'axe des ordonnées ssi $x = 0$ (l'équation de l'axe des ordonnées est $x = 0$).
   Si l'on remplace x par 0 dans l'équation, il vient $1 + (y-2)^2 = 7$, soit $(y-2)^2 = 6$.
   Donc $(y - 2 = \sqrt{6}$, ou $y - 2 = -\sqrt{6})$, et enfin $(y = 2 + \sqrt{6}$ ou $y = 2 - \sqrt{6})$.
   Comme l'équation a deux solutions, $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en deux points.
   Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées sont donc $E(0; 2-\sqrt{6})$ et $F(0; 2+\sqrt{6})$.
3. Donner les coordonnées du centre et le rayon du cercle d'équation $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 5$.
   C'est le cercle de centre $A(-4;-5)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 3 (corrigé)
Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble de points $\mathscr{C}$ d'équation

$$x^2 + y^2 + 4x - 3y - 6 = 0.$$

Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle, et déterminer les coordonnées de son centre Ω et son rayon.
Commentaire : on cherche à se ramener à la forme $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.
On regroupe les termes en x, et l'on regroupe les termes en y. Ensuite, on fait apparaîtres des identités remarquables, et l'on regroupe les constantes de l'autre côté du signe égal.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 4x - 3y - 6 &= 0 \\
(x^2 + 4x) + (y^2 - 3y) - 6 &= 0 \\
(x^2 + 4x + 4) - 4 + \left(y^2 - 2 \times y \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 6 &= 0 \\
(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= 10 + \frac{9}{4} \\
(x+2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(\frac{7}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

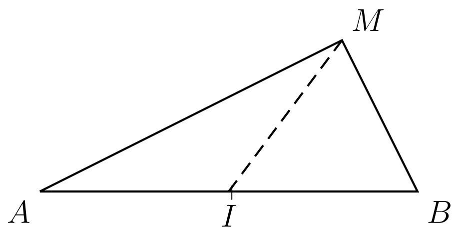
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ et de rayon $\frac{7}{2}$.

VI Compléments : ancien programme de 1re S

VI.1 applications dans le triangle

Théorème (Théorème de la médiane)
Soient A et B deux points, et I le milieu de $[AB]$. Quel que soit le point M,

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.
2. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ (théorème de la médiane).
3. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.



Démonstration

1.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= MI^2 - \frac{AB^2}{4}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 \\
&= 2MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 2IA^2 \\
&= 2MI^2 + 0 + 2 \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
&= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
MA^2 - MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\
&= MI^2 + 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 - MI^2 - 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} - IB^2 \\
&= 2\,\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) \\
&= 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} \\
&= 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

VI.2 Trigonométrie

Pour tous nombres réels a et b on a les formules suivantes :

Le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Formules de duplication

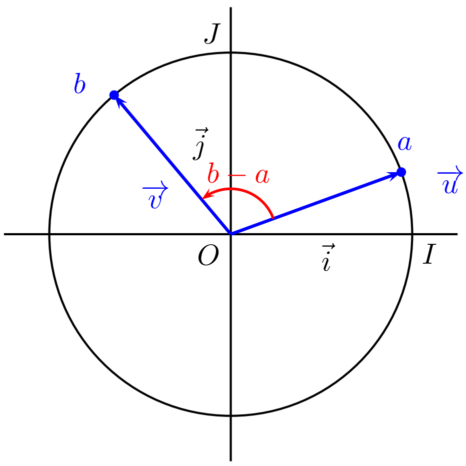
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Démonstration
Soient a et b deux réels.
On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, et on considère les deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $(\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{u}) = a\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{v}) = b\ [2\pi]$.



Alors,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{v}) &= (\overrightarrow{u}\,; \overrightarrow{i}\,) + (\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{v}) \quad [2\pi] \\
&= -(\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{v}) \quad [2\pi] \\
&= b - a \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

Or, dans ce repère, $\overrightarrow{u}(\cos a; \sin a)$ et $\overrightarrow{v}(\cos b; \sin b)$.
D'après la formule du produit scalaire en repère orthonormé et d'après la formule du cosinus, il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ &= 1 \times 1 \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \\ &= \cos(b-a) \end{aligned}$$

Ainsi, $\cos(b-a) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
Comme $\cos(-x) = \cos(x)$, on a établi la formule

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En remplaçant b par $(-b)$ dans cette formule, on obtient

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Par ailleurs, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right)\cos(a) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right)\sin(a) \\ &= -\sin(b)\cos(a) + \sin(a)\cos(b) \\ &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

Là encore, en remplaçant b par $(-b)$, il vient

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Les formules de duplication s'obtiennent en remplaçant b par a dans les formules d'addition.
Les formules de linéarisation s'obtiennent directement à partir des formules de duplication. $\square$