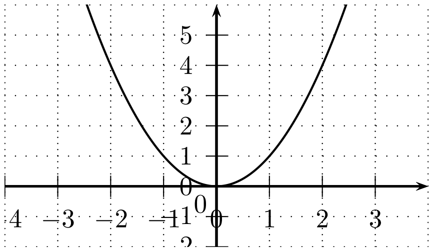
Seconde 5. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 11

Exercice 1 (cours : 4 points)

1. Tracer ci-dessous la représentation graphique de la fonction carré.



2. Donner le tableau de variation de la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

3. Compléter.
   (a) Pour sous événements A et B,
   $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ $\qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   (b) Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exercice 2 (4 points)

1. Soit le réel $a = 2 - \dfrac{2}{3}$. Mettre a, puis a^2 et $\dfrac{1}{a}$ sous forme de fraction irréductible.
   $a = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{6-2}{3} = \dfrac{4}{3}$. Donc $a^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$, et $\dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{4}$.
2. Résoudre les équations suivantes. Justifier.
   (a) $4x^2 - 1 = 0$
   $4x^2 - 1 = 0$ ssi $x^2 = \dfrac{1}{4}$ ssi $\left(x = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} \text{ou } x = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}\right)$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont } \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}.}$
   (b) $\dfrac{1}{x} = -3x$
   Soit $x \neq 0$.
   $\dfrac{1}{x} = -3x$ ssi $x^2 = -\dfrac{1}{3}$.
   Or, un carré est toujours positif.
   $\boxed{\text{L'équation n'a pas de solution.}}$

3. Soit un réel x tel que $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
   Donner le meilleur encadrement de x^2. Justifier la réponse.
   La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3; 2]$.

x	-3		0		2
x^2	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

   Sur cet intervalle, son minimum est 0 et son maximum est 9.
   $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$

Exercice 3 (6 points)

Dans une production de 100 000 pièces d'usine, on tire au hasard une pièce et on contrôle sa qualité. À l'issue du contrôle, la pièce est soit acceptée, soit refusée, mais il arrive que le contrôle fasse des erreurs de diagnostic.
5% des pièces sont non valables (défectueuses).
2% des pièces valables sont refusées, et 80 % des pièces non valables sont refusées.

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant. Aucune justification n'est demandée.

	Acceptée	Refusée	Total
Valable	93 100	1 900	95 000
Non valable	1 000	4 000	5 000
Total	94 100	5 900	100 000

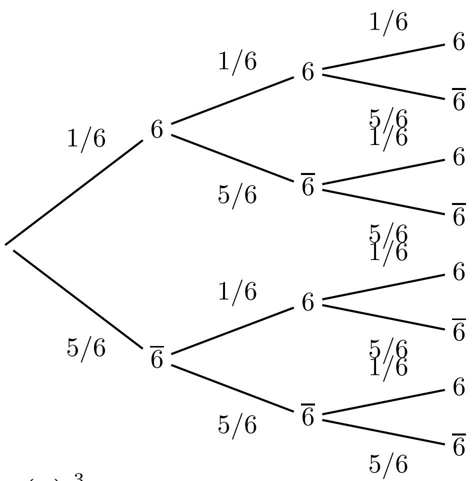
2. On définit les événements :
   — V : "La pièce est valable"
   — A : "la pièce est acceptée"
   (a) Déterminer $P(V)$ et $P(A)$. Justifier.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(V) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$.
   $\boxed{\text{Donc } P(V) = \frac{95\,000}{100\,000} = 0,95.}$
   $\boxed{\text{De même, } P(A) = \frac{94\,100}{100\,000} = 0,941.}$
   (b) Traduire par une phrase $A \cap V$ et calculer sa probabilité.
   $A \cap V$: "La pièce est valable et est acceptée".
   $\boxed{P(A \cap V) = \frac{93\,100}{10\,000} = 0,931.}$

(c) Traduire par une phrase $A \cup V$ et calculer sa probabilité.
$A \cup V$: "La pièce est valable ou est acceptée".
$P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V)$.
$\boxed{P(A \cup V) = 0,941 + 0,95 - 0,931 = 0,96.}$

(d) Il y a une erreur de diagnostic si l'on accepte une pièce non valable ou si l'on refuse une pièce valable. Déterminer la probabilité de l'événement E : "il y a une erreur de diagnostic".
$E = (A \cap \overline{V}) \cup (\overline{A} \cap V)$.
Or, $A \cap \overline{V}$ et $\overline{A} \cap V$ sont incompatibles.
Donc $P(E) = P(A \cap \overline{V}) + P(\overline{A} \cap V)$
$P(E) = \dfrac{1\,000}{100\,000} + \dfrac{1\,900}{100\,000} = \dfrac{2\,900}{100\,000} = 0,029.$

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait une erreur de diagnostic est de 0,029.}}$

Exercice 4 (2 points)
On lance un dé cubique équilibré trois fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6 ? Justifier.
Notons A : "on obtient au moins un 6".
Alors $\overline{A}$: "on n'obtient aucun 6"



$P(\overline{A} = P(\overline{6};\overline{6};\overline{6}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216}.$

Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}.$

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir au moins un 6 sur 3 lancers est de } \dfrac{91}{216} \text{ soit environ 0,42.}}$

Exercice 5 (5 points)
Dans un repère du plan, on considère la droite d d'équation

$$2x - y + 3 = 0.$$

1. Étudier par le calcul si points suivants appartiennent à d : $A(-2;7)$, et $B(4;11)$.
$2 \times (-2) - 7 + 3 = -4 - 7 + 3 = -8 \neq 0.$ $\boxed{\text{Donc } A \notin d.}$
$2 \times 4 - 11 + 3 = 11 - 11 = 0.$ $\boxed{\text{Donc } B \in d.}$

2. Déterminer les coordonnées du point C de d d'ordonnée égale à 5.
Comme $C(x;5) \in d$, les coordonnes vérifient l'équation, soit
$2x - 5 + 3 = 0$, puis $2x - 2 = 0$, et $x = 1$.
$\boxed{\text{Le point de } d \text{ qui a une ordonnée égale à 5 est } C(1;5).}$

3. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de d.
Avec le cours, la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-b;a)$.
$\boxed{\text{Ainsi, } \overrightarrow{u}(1;2) \text{ est un vecteur directeur de } d.}$
Méthode 2 : $B(4;11)$, et $C(1;5)$ appartiennent à d, donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de d.
$\overrightarrow{BC}(x_C - x_B; y_C - y_B)$, puis $\overrightarrow{BC}(-3;-6)$
On vérifie facilement que ces 2 vecteurs sont colinéaires, $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{u}$.

4. On considère les points $E(5;-3)$ et $F(-4;1)$.

(a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (EF).
Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ dirige la droite (EF).
$\overrightarrow{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$, soit $\overrightarrow{EF}(-9;4)$.
$\boxed{\overrightarrow{EF}(-9;4) \text{ est un vecteur directeur de la droite } (EF).}$

(b) En déduire une équation de la droite (EF).
Soit $M(x;y)$ un point du plan.
$\overrightarrow{EM}(x-5;y+3)$. On rappelle $\overrightarrow{EF}(-9;4)$.
$M \in (EF)$ ssi $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinaires.
$M \in (EF)$ ssi $(x-5) \times 4 - (y+3) \times (-9) = 0$
$M \in (EF)$ ssi $4x - 20 + 9y + 27 = 0$
$M \in (EF)$ ssi $4x + 9y + 7 = 0$.
$\boxed{\text{Une équation de la droite } (EF) \text{ est } 4x + 9y + 7 = 0.}$

(c) Les droites (EF) et d sont-elles parallèles ? Justifier.
On étudie si les vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}(2;1)$ et $\overrightarrow{EF}(-9;4)$ sont colinéaires.
$\det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{EF}) = xy' - yx' = 2 \times 4 - 1 \times (-9) = 17 \neq 0.$
$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{EF} \text{ ne sont pas colinéaires.}\\ \text{Donc les droites } (EF) \text{ et } d \text{ ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.}\end{array}}$