Chapitre 11 : Vecteurs : deuxième partie
Vecteurs colinéaires. Applications.

I Rappels sur les coordonnées d'un vecteur

Théorème
Dans un repère du plan, soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points.
Alors, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Définition (et propriété)
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB, notée aussi $||\overrightarrow{AB}||$.
Pour un vecteur $\overrightarrow{u}$, on note sa norme $||\overrightarrow{u}||$.
Dans un repère ORTHONORMÉ, on a :

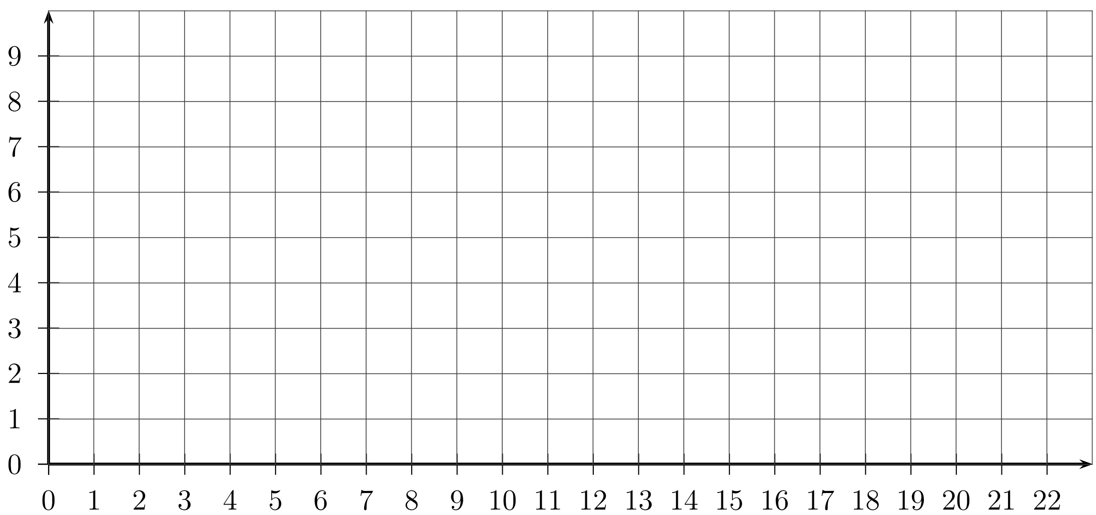
1. Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $||\overrightarrow{AB}|| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
2. Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

II Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition
Dans un repère du plan, soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Soit k un réel.
Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
On admet que le vecteur $k\overrightarrow{u}$ ainsi défini ne dépend pas du repère choisi.

Exercice 1
Dans un repère du plan, on donne $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{u}$ et $-2\overrightarrow{w}$.
2. Représenter tous ces vecteurs dans le repère ci-dessous



Propriété (règles de calcul)
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et les réels k et k', on a :

1. $k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$,
2. $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$,
3. $(k \times k')\overrightarrow{u} = k(k'\overrightarrow{u})$,
4. $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Remarque
On notera que les règles de calcul sont les mêmes que pour la multiplication et l'addition avec les nombres réels.

Exercice 2
Dans un repère du plan, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix}$.

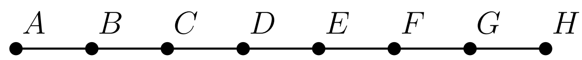
Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{u}$
2. $\overrightarrow{u} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{w}$

Exercice 3
Dans un repère du plan, on donne le point $A(1;7)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{u}$.
2. Placer A et M et représenter les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Exercice 4 (calcul mental)
On considère des points A, B,…, H régulièrement placés sur une droite. Compléter avec un nombre réel.



1. $\overrightarrow{DA} = \ldots\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DE} = \ldots\overrightarrow{AE}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} = \ldots\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AC} = \ldots\overrightarrow{AE}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EC} = \ldots\overrightarrow{CH}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EH} = \ldots\overrightarrow{AH}$

Exercice 5 (construction de point, relation de Chasles)
Soient A, B et C trois points distincts du plan.

1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB}$.
3. Placer F défini par $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA}$

Exercice 6 (utilisation de la relation de Chasles)
Soient A, B, C trois points du plan tels que $2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Placer le point C sur la droite (AB).

Propriété
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout nombre réel k, on a

$$||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||.$$

Exercice 7
Soit dans un repère orthonormé $\overrightarrow{u}(3;-2)$.

1. Calculer la norme de $\overrightarrow{u}$.
2. En déduire la norme du vecteur $-5\overrightarrow{u}$ à l'aide de la propriété.

III Colinéarité de vecteurs. Applications

Définition
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls (tous les deux).
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
On considère que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Remarque
Deux vecteurs colinéaires (non nuls) ont leurs coordonnées proportionnelles.

Exercice 8
On se place dans un repère du plan.
Reconnaître les vecteurs colinéaires parmi les vecteurs suivants, et le cas échéant, donner une relation de la forme $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
$\overrightarrow{a}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d}\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$,$\overrightarrow{e}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$,$\overrightarrow{f}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{g}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{h}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$

Théorème (caractérisation analytique de la colinéarité)
Dans un repère du plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
Le nombre $xy' - yx'$ est appelé le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, et se note $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Démonstration

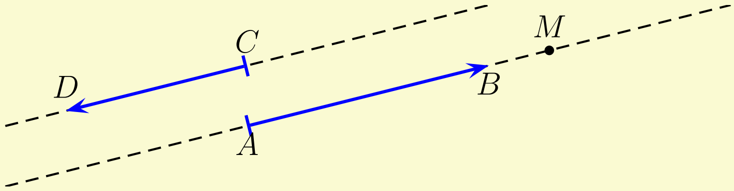
1. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires.
   Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, le résultat est évident.
   Sinon, il existe alors un réel k tel $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.
   Alors, $det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy = 0$.
   On a montré que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.
2. Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$ $(*)$.
   Alors, $xy' = yx'$.
   Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$.
   On peut donc supposer que $\overrightarrow{u}$ est non nul. Cela signifie que l'une de ses coordonnées $(x; y)$ est non nulle. Par exemple, supposons que ça soit x : $x \neq 0$.
   La relation $(*)$ peut alors s'écrire $y' = \dfrac{x'}{x}y$. En posant $k = \dfrac{x'}{x}$, on a donc $y' = ky$, et on a également $x' = kx$.
   Ainsi, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Donc si $xy' - yx' = 0$, alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Conclusion : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. □

Exercice 9
Déterminer le réel a pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\a\end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Propriété (applications de la colinarité)

1. Soient A, B, C, et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
   Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



2. Les points A, B et M sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

Exercice 10
On se place dans un repère du plan. On considère les points $A(3;1)$, $B(0;2)$, $C(4;-1)$ et $D(-5;2)$.

1. Étudier si les points A, B et C sont alignés.
2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3. Que peut-on déduire des questions 1 et 2 ?

Définition (nouvelle définition d'un repère du plan)
On définit un repère du plan par la donnée d'un triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$ où O est un point, et $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires (donc non nuls).
Alors, les coordonnées d'un point M sont l'unique couple $(x; y)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$