1re G. Correction du dm1

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout réel x, $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
   L'affirmation est fausse : l'égalité n'est pas vérifiée pour tous les réels.
   En effet, en prenant $x = 1$, le premier membre vaut 0 et le deuxième vaut -4.
2. Il existe un réel x tel que $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
   L'affirmation est vraie : l'égalité est vérifiée pour $x = 0$.

Exercice 2

1. Pour tout réel x, on a :
   d'une part
   $$\begin{aligned}(x-1)x(x+1)(x+2)+1 &= (x-1)(x+1)x(x+2)+1\\ &= (x^2-1)(x^2+2x)+1\\ &= x^4+2x^3-x^2-2x+1\end{aligned}$$
   d'autre part
   $$\begin{aligned}(x^2+x-1)^2 &= (x^2+x-1)(x^2+x-1)\\ &= x^4+x^3-x^2+x^3+x^2-x-x^2-x+1\\ &= x^4+2x^3-x^2-2x+1\end{aligned}$$
   On en déduit que, pour tout réel x, on a :
   $$(x-1)x(x+1)(x+2)+1 = (x^2+x-1)^2.$$
2. En utilisant l'égalité précédente pour $x = 10$, on obtient :
   $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1 = (10^2 + 10 - 1)^2 = 109^2$.
   On en déduit que $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1$ est le carré de 109.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.

1. Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d). Pour la courbe de f, on s'aidera d'un tableau de valeurs avec la calculatrice.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
   D'une part,
   $f(x)-(-x-4) = -x^2-2x+2-(-x-4) = -x^2-2x+2+x+4 = -x^2-x+6$.
   D'autre part, $(x+3)(2-x) = -x^2 - x + 6$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
3. (a) Résoudre l'équation $f(x) - (-x-4) = 0$.
   $f(x)-(-x-4) = 0$ ssi $f(x) = -x-4$ ssi $(x+3)(x-2) = 0$ ssi $(x+3 = 0$ ou $x - 2 = 0)$ ssi $(x = -3$ ou $x = 2)$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont } -3 \text{ et } 2.}$
   (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite (d).
   On remplace x par -3 et 2 dans $y = -x-4$ (ou dans $f(x)$).
   $-(-3) - 4 = -1$, et $-2 - 4 = -6$.
   $\boxed{\mathscr{C} \text{ et } d \text{ se coupent en } A(-3;-1) \text{ et } B(2;-6).}$
4. (a) Dresser le tableau de signe de $(x+3)(2-x)$.
   Valeurs clés :
   $x + 3 = 0$ ssi $x = -3$, et $2 - x = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(-x-4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   (b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et (d).
   On en déduit que lorsque $x \in]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$, $f(x) < -x-4$.
   Donc sur $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
   Lorsque $x \in]-3;2[$, $f(x) > -x-4$.
   Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d) sur $]-3;2[$.
   Enfin $f(x) = -x-4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc $\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2.

On pourra vérifier la cohérence de ces résultats (q3 et q4) avec le graphique.