

Chapitre 4 : Suites arithmétiques

I Rappels sur les suites arithmétiques

I.1 Définition

Définition

Une suite arithmétique est une suite où chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre r . Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique. On a donc la relation suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 sont les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. La raison de cette suite arithmétique est donc 3.

I.2 Terme général

Théorème (Terme général d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

1. Si le premier terme est u_0 , alors pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n = u_0 + nr$.
2. Si le premier terme est u_1 , alors pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

Exemple :

Considérons la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 7.

1. Exprimer u_n en fonction de n .
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n = 3 + 7n$.
2. En déduire u_{40} .
 $u_{40} = 3 + 7 \times 40 = 3 + 280 = 283$.

Remarque

On a aussi une formule pour exprimer u_n à partir d'un terme u_p quelconque : pour tous entiers n et p ,

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Exercice 1

La suite arithmétique (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $r = -\frac{1}{2}$. Calculer u_{2014} .

Remarque

Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.

II Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique.

1. Si le terme initial de la somme est u_0 , alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

2. Si le terme initial de la somme est u_1 , alors :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

3. Pour calculer une somme S de termes consécutifs de u_n (quel que soit le premier terme), on a :

$$S = \frac{(\text{nombre de termes})(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$