Chapitre 11 : Fonctions de référence

I La fonction carré

Définition
La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 1

1. Calculer l'image par la fonction carré des réels -3 ; -1 ; 0 ; 2 ; $\sqrt{7}$; $\dfrac{11}{3}$
2. Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas non plus décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème (sens de variation)
La fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & 0 & & +\infty \\
\hline
x^2 & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 0 & & \\
\hline
\end{array}$$

Démonstration
Soient a, $b \in]-\infty; 0]$. Supposons que $a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Comme on suppose que $a < b$, $a - b < 0$.
Comme a et b sont négatifs (ils appartiennent $]-\infty; 0]$), $a + b < 0$.
D'après la règle des signes, $f(a) - f(b) = a^2 - b^2 > 0$.
Ainsi, pour tous a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
La fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On montre de façon analogue qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$. □

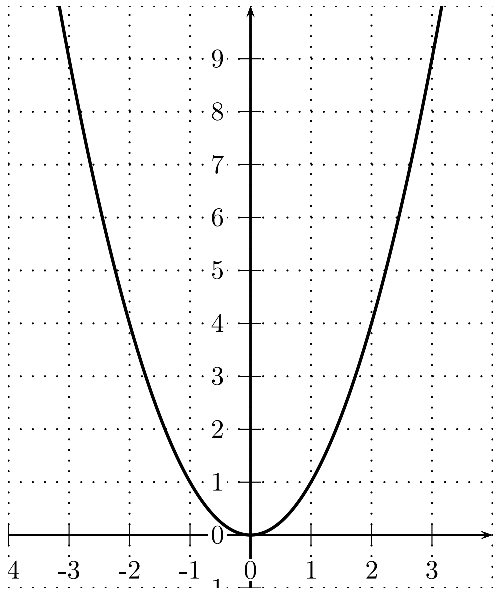
Exercice 2 (comparaison et encadrement)

1. Comparer sans calculatrice les carrés des réels a et b.
   (a) $a = 5,7$ et $b = 5,8$
   (b) $a = -3,17$ et $b = -3,16$
2. Donner le meilleur encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants. Justifier.
   (a) $4 < x < 5$
   (b) $-7 \leqslant x \leqslant -6$
   (c) $-5 \leqslant x \leqslant 2$
   (d) $-4 < x \leqslant 9$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
x^2									

Propriété (représentation graphique)
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une parabole de sommet O.
L'axe des ordonnées (Oy) est axe de symétrie de la courbe.



Remarque

— La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se traduit par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.
Autrement dit, deux opposés ont le même carré.
On dit que la fonction carré est paire.

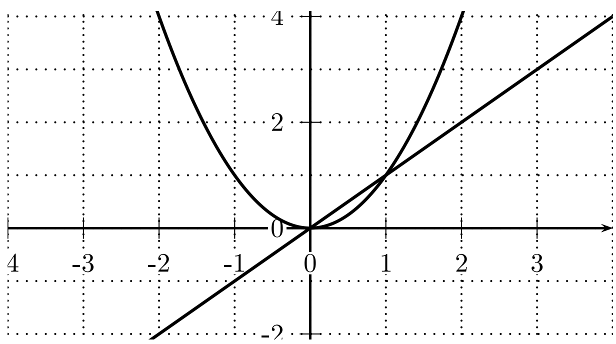
— L'ensemble des valeurs prises par la fonction carré est $[0; +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ (un carré est toujours positif).

Exercice 3
Considérons la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les antécédents de 9 par f.
2. Rechercher les antécédents de -2 par f.
3. Soit k une nombre réel.
Résoudre suivant les valeurs de k l'équation $x^2 = k$.

Exercice 4 (comparaison de x et de x^2)
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1. Donner un réel a vérifiant $a^2 > a$, et un réel b vérifiant $b^2 < b$.
2. Factoriser $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le tableau de signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la comparaison de x^2 et x, et la position relative des courbes de f et g. Vérifier la cohérence avec le graphique ci-dessous.

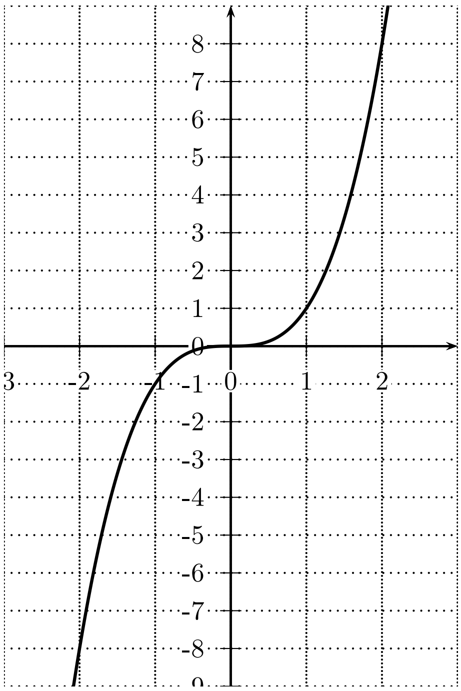


II La fonction cube

Définition
La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

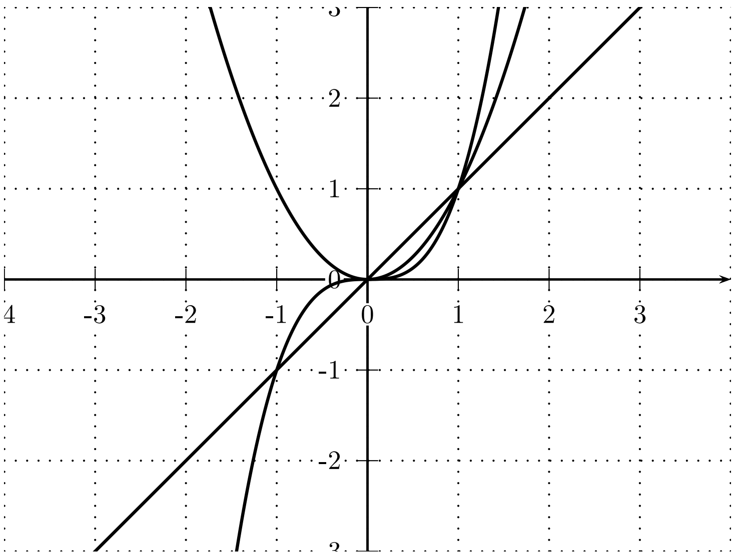
Propriété (admise)
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque
La courbe est symétrique par rapport au point O : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ (la fonction cube est impaire).



Exercice 5 (comparaison de x, x^2 et x^3 sur $[0; +\infty[$)
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, et $h(x) = x^3$.

1. Factoriser l'expression $g(x) - h(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la comparaison de x^2 et x^3 sur $\mathbb{R}$.
3. À l'aide du résultat de l'exercice précédent et de celui-ci, comparer x, x^2 et x^3 lorsque $x \geqslant 0$. Vérifier grahiquement.



III La fonction inverse

Définition
La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Remarque
La fonction inverse n'est pas définie en 0 (0 n'a pas d'inverse).

Théorème
La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$,
et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

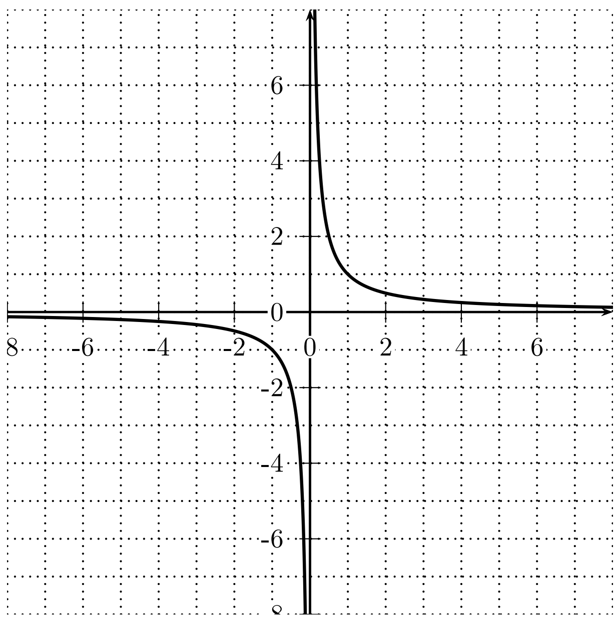
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Exercice 6

1. Comparer les inverses de a et b.
   (a) $a = 1,3$ et $b = 1,4$
   (b) $a = -2,7$ et $b = -2,6$
2. Donner le meilleur encadrement de $\dfrac{1}{x}$.
   (a) $5 < x < 10$
   (b) $-9 < x < -7$

Exercice 7
Démontrer le théorème relatif aux variations de la fonction inverse.

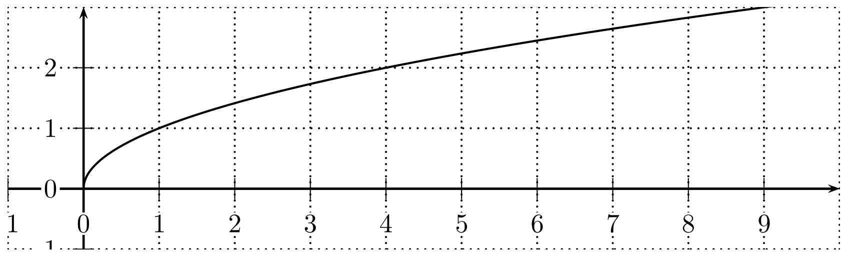
Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Remarque
La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.
L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe (fonction impaire).
Un nombre x non nul et son inverse $\frac{1}{x}$ sont toujours de même signe :
$x > 0$ ssi $\frac{1}{x} > 0$, et $x < 0$ ssi $\frac{1}{x} < 0$.

IV La fonction racine carrée

Définition
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

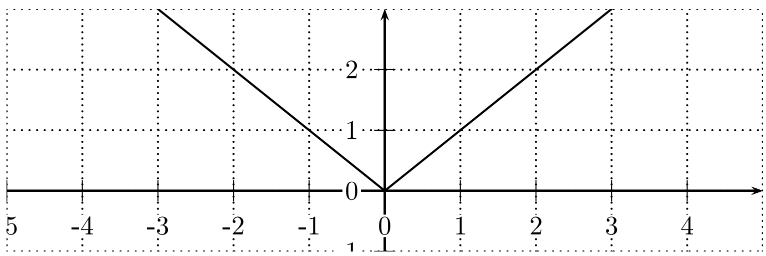


Propriété
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

V La fonction valeur absolue

Définition
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ défini par :
- si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Propriété ("distance" entre deux réels)
Pour tous réels a et b, la distance entre a et b (longueur AB où A et B sont les images des réels a et b sur la droite graduée) est $|a - b|$.

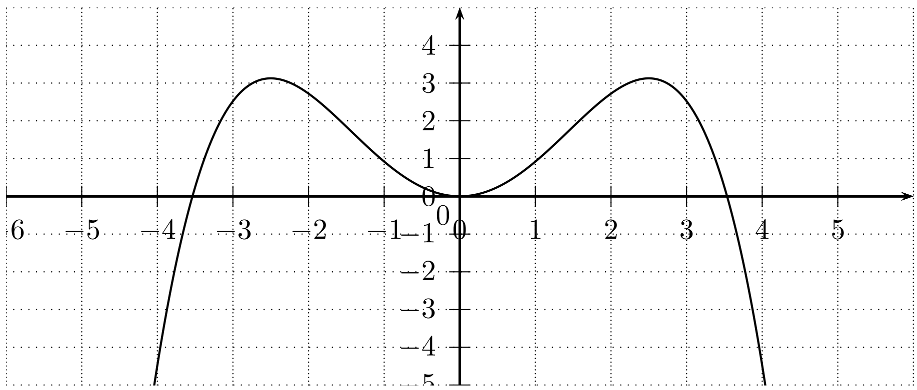
Remarque
1. Soient $a \in \mathbb{R}$, et $r > 0$.
   L'ensemble des nombres réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

VI Fonctions paires et fonctions impaires

VI.1 Fonctions paires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

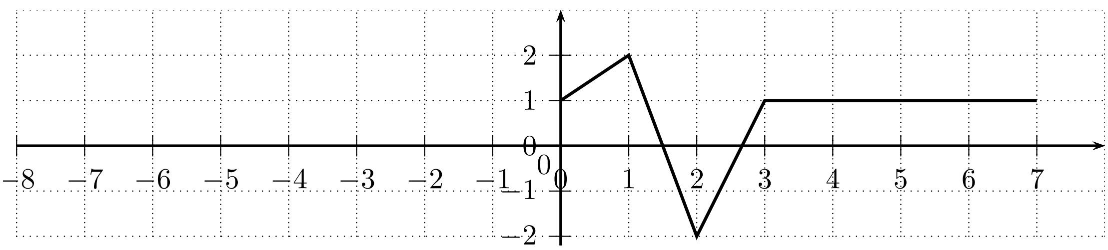
Conséquence graphique
On se place dans un repère orthogonal.
Lorsque f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Illustration :



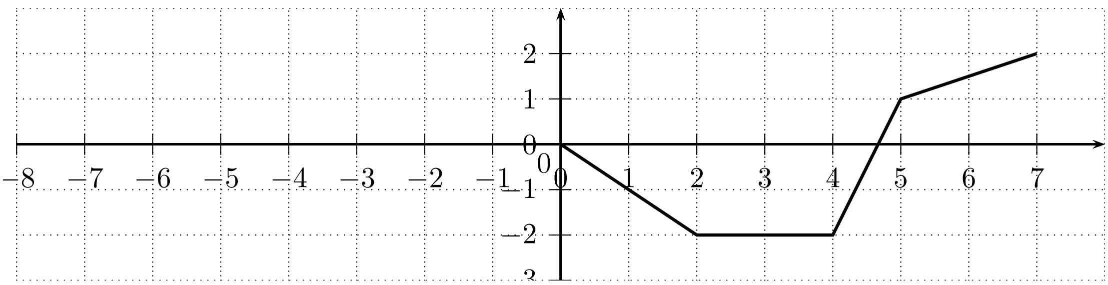
Exemple :
La fonction carré est paire.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.

Exercice 8
Compléter les courbes de fonctions pour qu'elles représentent des fonctions paires sur $[-7; 7]$.

1. Fonction f.



2. Fonction g



Exercice 9
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5}x^6 - x^2$. Montrer que f est paire.

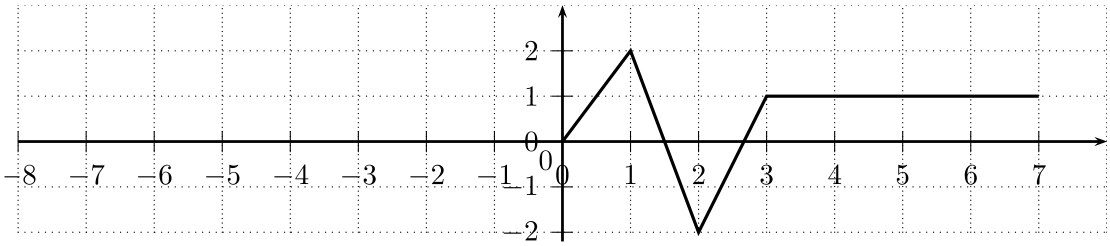
VI.2 Fonctions impaires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$). On dit que f est impaire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

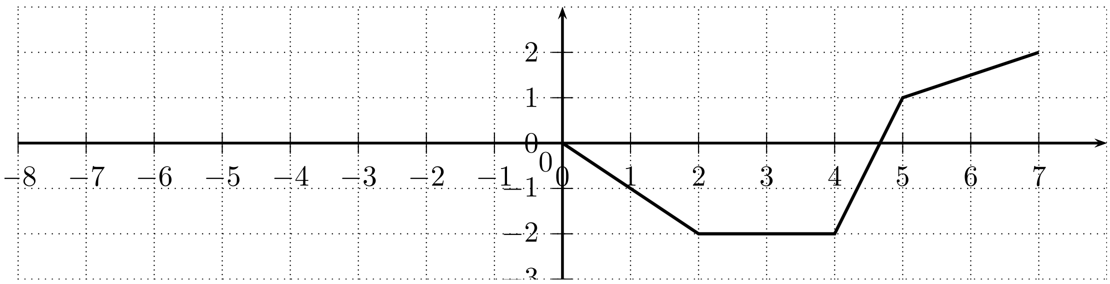
Conséquence graphique
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère (le point O).
Exemple :
La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est impaire.
En effet, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.

Exercice 10
Compléter les courbes de fonctions pour qu'elles représentent des fonctions impaires sur $[-7; 7]$.

1. Fonction f.



2. Fonction g



Remarque
1. Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n entier pair sont des fonctions paires.
2. Les fonctions $x \mapsto x^n$ avec n impair sont des fonctions impaires.

Remarque
1. Il existe des fonctions ni paire ni impaire (fonction racine carrée, voir aussi l'exercice suivant).
2. Il n'y a qu'une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire, c'est la fonction nulle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$).

Exercice 11
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 5x$.
1. Calculer $f(-2)$, puis $f(2)$.
2. Que peut-on en déduire sur la parité de f ?

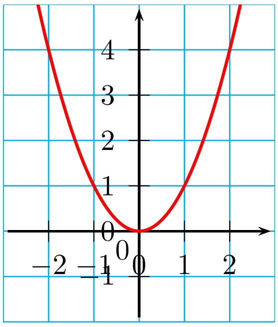
Exercice 12 (recherche des fonctions affines paires ou impaires)
Soient a et b deux réels, et soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

1. Exprimer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. (a) Montrer que si f est paire, alors $a = 0$.
   (b) Étudier la réciproque de l'implication précédente, et conclure.
3. (a) Montrer que si f est impaire, alors $b = 0$.
   (b) Étudier la réciproque de l'implication précédente, et conclure.

Quelques exemples avec des fonctions de référence

fonction carré

$f(x) = x^2$

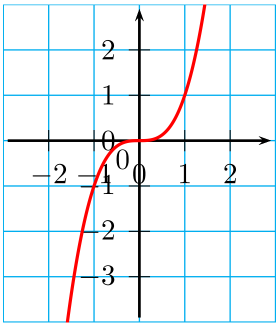


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction cube

$f(x) = x^3$

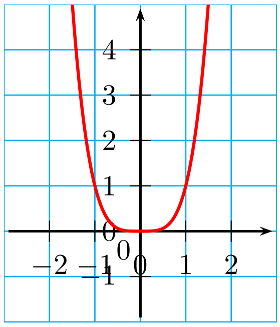


$D_f = \mathbb{R}$

f est impaire

puissance quatrième

$f(x) = x^4$

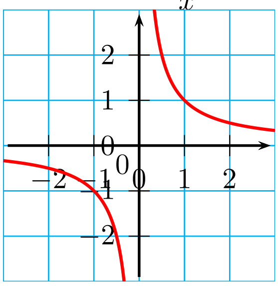


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

fonction inverse

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

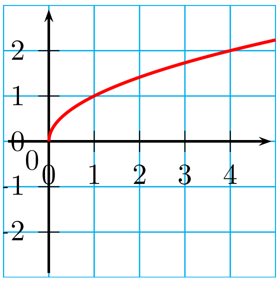


$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

f est impaire

fonction racine carrée

$f(x) = \sqrt{x}$

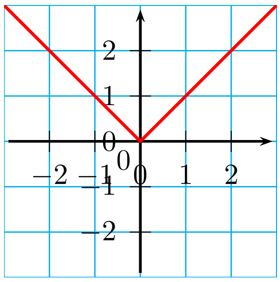


$D_f = [0; +\infty[$

ni paire ni impaire

fonction valeur absolue

$f(x) = |x|$

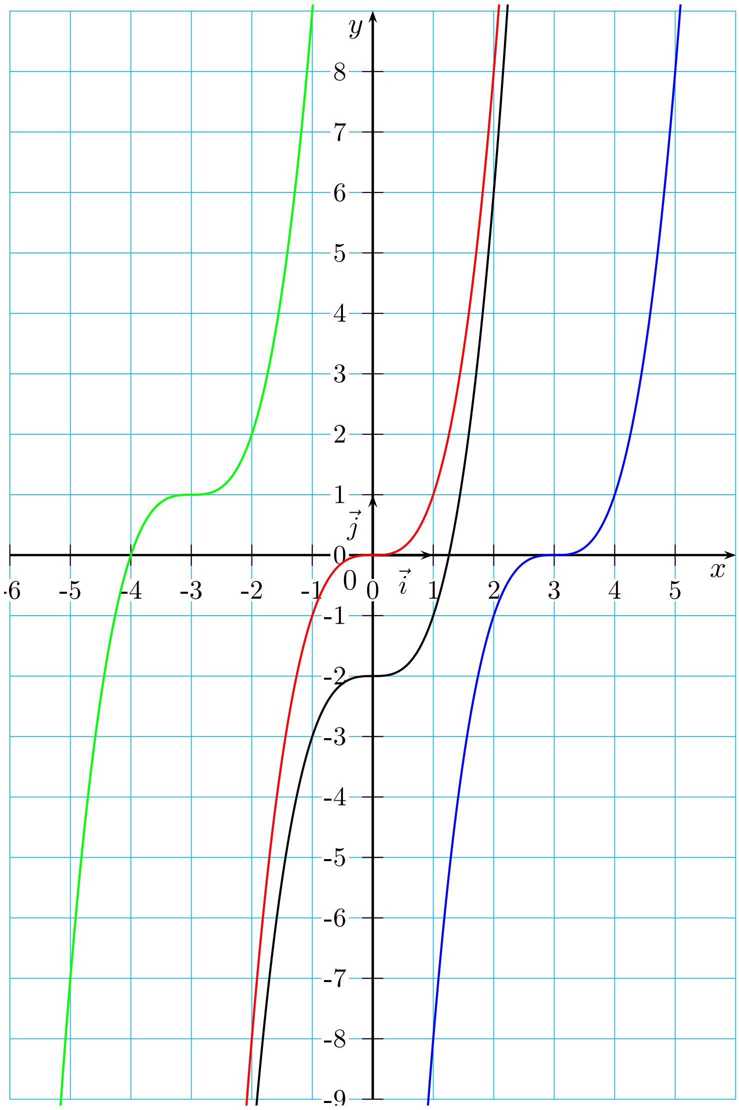


$D_f = \mathbb{R}$

f est paire

VII Complément : fonctions associées

Exemple :
$f(x) = x^3$,
$g(x) = x^3 - 2$,
$h(x) = (x - 3)^3$,
$i(x) = (x + 3)^3 + 1$.



Théorème
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Si g est définie par $g(x) = f(x - a)$, alors $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i}$.
2. Si h est définie par $h(x) = f(x) + b$, alors $\mathcal{C}_h$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $b\vec{j}$.
3. Si u est définie par $u(x) = f(x-a)+b$, alors $\mathcal{C}_u$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.
4. Si v est définie par $v(x) = -f(x)$, alors $\mathcal{C}_v$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie d'axe $(O; \vec{i})$.