

BTS. Correction du DS8

Exercice 1 (5 points)

Compléter sur l'énoncé.

1. Pour chaque nombre complexe donné sous forme algébrique $a + ib$ avec a et b réels, préciser la partie réelle a et la partie imaginaire b .

$$5 - 8i. a = 5 \text{ et } b = -8$$

$$\frac{5 - 9i}{10}. a = 0,5 \text{ et } b = -0,9$$

$$-4. a = -4 \text{ et } b = 0$$

$$11i\sqrt{3}. a = 0 \text{ et } b = 11\sqrt{3}.$$

2. Le conjugué de $-1 - 6i$ est $-1 + 6i$.

$$3. (2 - 3i)(2 + 3i) = 2^2 + 3^2 = 13$$

4. Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c réels, $a \neq 0$.
Le discriminant de l'équation est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- (a) Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- (b) Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

- (c) Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes (non réelles) :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exercice 2 (4 points)

On pose $z_1 = 3 - 2i$, et $z_2 = 1 + 5i$.

Calculer et donner le résultat sous forme algébrique :

$$1. A = z_1 + z_2$$

$$A = 3 - 2i + 1 + 5i = 4 + 3i$$

$$2. B = 2i \times z_1 - z_2 = 2i(3 - 2i) - (1 + 5i) = 6i + 4 - 1 - 5i = 3 + i$$

$$3. C = z_1 \times z_2 = (3 - 2i)(1 + 5i) = 3 + 15i - 2i + 10 = 13 + 13i$$

$$4. D = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{1 + 5i} = \frac{(3 - 2i)(1 - 5i)}{(1 + 5i)(1 - 5i)}$$
$$D = \frac{3 - 15i - 2i - 10}{1^2 + 5^2} = \frac{-7 - 17i}{26}$$

Exercice 3 (5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations, et donner la solution sous forme algébrique.

$$1. (2 - 3i)z = 4 + 5i$$

$$z = \frac{4 + 5i}{2 - 3i} = \frac{(4 + 5i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{8 + 12i + 10i - 15}{2^2 + 3^2} = \frac{-7}{13} + \frac{22}{13}i$$

$$2. (1 + 7i)\bar{z} = 2i$$

$$\bar{z} = \frac{2i}{1 + 7i} = \frac{2i(1 - 7i)}{1^2 + 7^2} = \frac{2i + 14}{50} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25}i.$$

$$\text{Donc } z = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i.$$

$$3. 4 - iz = -3z + 7i$$

$$(3 - i)z = -4 + 7i \text{ ssi } z = \frac{(-4 + 7i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{-12 - 4i + 21i - 7}{3^2 + 1^2}.$$

$$\text{ssi } z = \frac{-19 + 17i}{10} = -1,9 + 1,7i$$

Exercice 4 (6 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$1. 6z^2 - 11z + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 6 \times 5 = 121 - 120 = 1 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 - 1}{12} = \frac{5}{6}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11 + 1}{12} = 1.$$

Les solutions sont 1 et $\frac{5}{6}$.

$$2. 3z^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4 \times 3 \times 4 = -48 < 0.$$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\frac{i\sqrt{48}}{6} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}i.$$

Il y a deux solutions qui sont $\frac{2\sqrt{3}}{3}i$ et $-\frac{2\sqrt{3}}{3}i$.

$$3. \frac{1}{9}z^2 - \frac{2}{3}z + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{9} \times 1 = 0.$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2} = 3$$

Il y a une solution qui est 3.

$$4. r^2 = r - 8$$

$$r^2 - r + 8 = 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 8 = 1 - 32 = -31 < 0.$$

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1 - i\sqrt{31}}{2}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1 + i\sqrt{31}}{2}$$

Il y a deux solutions qui sont $\frac{1 - i\sqrt{31}}{2}$ et $\frac{1 + i\sqrt{31}}{2}$.