Correction du contrôle n° 7

Exercice 1

Dans le métro, il y a 9 % des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station Alesia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de personnes qui fraudent sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale. On arrondira les probabilités à 10^{-4}

1. Sans justifier, donner les paramètres de cette loi.
   X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(200; 0,09)$.
2. Exprimer et puis calculer $P(X = 21)$.
   $P(X = 21) = \binom{200}{21} 0,09^{21} 0,91^{200-21} \approx 0,0705$.
3. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.
   $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 9) \approx 0,7263$.
4. Quelle est la probabilité de signaler au moins 15 fraudeurs ?
   $P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 0,8042$.
   La probabilité de signaler au moins 15 fraudeurs est d'environ 0,8042.
5. En moyenne, combien de personnes seront signalées en fraude ?
   $E(X) = np = 200 \times 0,09 = 18$.
   En moyenne, on signale 18 fraudeurs par jour.
6. Si le prix du ticket est de 1,70 euros, quel doit être le montant de l'amende pour que l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent à cause de la fraude, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station.
   $5000 \times 0,09 = 450$.
   Il y a en moyenne 450 fraudeurs par jour à cette station.
   $450 \times 1,7 = 765$.
   Comme le prix d'un billet et de 1,7 euro, le manque à gagner pour la compagnie est de 765 euros.
   D'après la question précédente, en controlant 200 personnes, on rencontre en moyenne 18 fraudeurs.
   $\frac{765}{18} = 42,5$.
   Pour ne pas perdre d'argent, le montant de l'amende doit être de 42,5 euros.

Exercice 2

Le directeur sportif d'un club de football professionnel souhaite recruter un joueur pour la saison à venir. Il recherche un attaquant qui marque au moins un but par match 7 fois sur 10.
Il rencontre un agent de joueur qui lui propose Diego dont il gère la carrière. Lors de la saison précédente, Diego, qui se trouvait dans un autre club, a marqué au moins un but dans 20 matchs sur les 38 journées de championnat.
On fait l'hypothèse qu'il marque au moins un but par match 7 fois sur 10. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de matchs où il marque au moins un but dans la saison (soit sur les 38 matches joués). On admet que les performances sont indépendantes d'un match à l'autre.

1. On répète 38 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 0,7$ (on considère que le "succès" est que Diego marque au moins un but). La variable X qui compte le nombre de matchs où Diego marque au moins un but suit la loi binomiale $\mathscr{B}(38; 0,7)$.
2. Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a)$ est $a = 21$.
   En effet, $P(X \leqslant 20) \approx 0,018$, et $P(X \leqslant 21) \approx 0,039$.
   Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est $b = 32$.
   En effet, $P(W \leqslant 31) \approx 0,964$, et $P(X \leqslant 32) \approx 0,986$.
   $\frac{a}{n} = \frac{21}{38} \approx 0,55$.
   $\frac{b}{n} = \frac{32}{38} \approx 0,84$.
   Un intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 95% est $I = [0,55; 0,84]$.
3. Au regard des résultats de Diego la saison précédente, quelle sera la décision du directeur sportif ?
   $f = \frac{20}{38} \approx 0,53 \notin I$.
   On peut rejeter l'hypothèse selon laquelle Diego marque au moins un but par match 7 fois sur 10, avec un risque d'erreur d'environ 5 %.
   Le directeur sportif devrait choisir de ne pas le recruter.
4. $f = \frac{25}{38} \approx 0,65 \in I$.
   Dans ce cas, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle l'attaquant marque au moins un but par match 7 fois sur 10.
   Le directeur sportif peut donc envisager de recruter un tel attaquant.

Exercice 3

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros. Le 1er janvier 2015 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le mois précédent. On note $u_1 = 30$, et pour tout $n \geqslant 1$, u_n le montant déposé le n^{e} mois à partir de décembre 2014.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 12$.
   Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison 12.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r = 30 + (n-1) \times 12$.
2. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
   $u_{12} = 30 + 11 \times 12 = 162$.
   Le 1er décembre 2015, il dépose la somme de 162 euros.
3. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^{e} mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2015.

(a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

$$\begin{aligned} C_n &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} \\ &= \frac{[30 + 30 + (n-1) \times 12] \times n}{2} \\ &= \frac{(48 + 12n)n}{2} \\ &= (24 + 6n)n \\ &= 6n^2 + 24n \end{aligned}$$

(b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.
On cherche le plus petit entier n tel que $C_n \geqslant 1500$.
On résout l'inéquation $6x^2 + 24x - 1500 \geqslant 0$.
En simplifiant par 6, $x^2 + 4x - 250 \geqslant 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 1016$.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \approx -17,93$.
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \approx 13,93$.
Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x^2 + 4x - 250$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le plus petit entier n pour lequel $6n^2 + 24n \geqslant 1500$ est donc $n = 14$.
Le mois d'indice 14 est le mois de février 2016.
Il pourra acheter la guitare en février 2016.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -0.75u_n + 7$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
$u_0 = 6$.
$u_1 = -0.75 \times u_0 + 7 = -\dfrac{3}{4} \times 6 + 7 = \dfrac{5}{2} = 2.5$.
$u_2 = -0.75 \times u_1 + 7 = -\dfrac{15}{8} + 7 = \dfrac{41}{8} = 5.125$.
$u_3 = -0.75u_2 + 7 = \dfrac{101}{32} \approx 3.16$.

$u_1 - u_0 = 2.5 - 6 = -3.5$.
$u_2 - u_1 = 2.625 \neq u_1 - u_0$.
$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2.5}{6} = \dfrac{5}{12} \approx 0.416$
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5.125}{2.5} \approx 2.05$.
$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ n'est pas non plus géométrique.}}$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n - 4.$$

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= -0.75u_n + 7 - 4 \\ &= -0.75u_n + 3 \\ &= -0.75\left(u_n - \frac{3}{0.75}\right) \\ &= -0.75(u_n - 4) \\ &= -0.75 \times v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison -0.75.
$v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$.
$\boxed{(v_n) \text{ est la suite géométrique de raison } -0.75 \text{ et de premier terme } v_0 = 2.}$

(b) Exprimer v_n en fonction de n.
Indication : on aura trouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison -0.75.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$.
$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 2 \times (-0.75)^n.}$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times (-0.75)^n + 4.$$

Comme pour tout entier n, $v_n = u_n - 4$, on a $u_n = v_n + 4$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times (-0.75)^n + 4.}$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on note S_n et S'_n les sommes suivantes :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

(a) Exprimer S_n en fonction de n.
S_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique (v_n)

(l'indice va de 0 à $n-1$, d'où n termes).
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= 2 \times \frac{1-(-0.75)^n}{1-(-0.75)} \\ &= 2 \times \frac{1-(-0.75)^n}{1.75} \\ &= \frac{8}{7}\left[1-(-0.75)^n\right] \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$S'_n = \frac{8}{7}\left[1-(-0.75)^n\right] + 4n.$$

On rappelle que pour tout entier k, $u_k = v_k + 4$.

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (v_k + 4) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k + \sum_{k=0}^{n-1} 4 \\ &= \frac{8}{7}\left[1-(-0.75)^n\right] + \underbrace{4+4+\ldots+4}_{n \text{ fois}} \\ &= \frac{8}{7}\left[1-(-0.75)^n\right] + 4n \end{aligned}$$

(c)

(d) On admet que la suite S'_n tend vers $+\infty$. En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S'_{n_0} > 100$.
$S'_1 = u_0 = 6$.
Algorithme de seuil
`1` $\to N$
`6` $\to S$
`Tant que` $S \leqslant 100$
$N+1 \to N$
$\frac{8}{7}\left[1-(-0.75)^N\right] + 4N \to S$
`Fin Tant que`
`Afficher` N
$\boxed{\text{On trouve } n_0 = 25.}$

Exercice 5 (Bonus : 2 points)
Une urne contient dix boules rouges et dix boules bleues.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On tire successivement et avec remise n boules de l'urne.
On considère les événements suivants :
A : « On obtient des boules des deux couleurs »
B : « On obtient au plus une boule rouge »
Quel est le plus probable des événements A et B ?
On posant X la variable qui correspond au nombre de boules rouges sur les n tirages, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$.
On a alors $A = (1 \leqslant X \leqslant n-1)$.
$P(A) = 1 - [P(X=0) + P(X=n)] = 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
$P(B) = P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} P(A) &\geqslant P(B) \\ 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n &\geqslant (n+1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 &\geqslant (n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

En s'aidant de la calculatrice, pour $n \geqslant 2$, on observe

n	2	3	4	5	6	7
$(n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$	1,25	0,75	0,4375	0,25	0,14	0,07

En posant $v_n = (n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+3}{2^n}$, il semble que la suite (v_n) soit décroissante et converge vers 0.
Montrons qu'elle est décroissante.
On a, pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n = \frac{n+4}{2^{n+1}} - \frac{n+3}{2^n} = \frac{n+4-2(n+3)}{2^{n+1}} = \frac{-n-2}{2^{n+1}} < 0$.
Pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n < 0$ et la suite (v_n) est bien décroissante.
Comme $v_2 = 1,25$ et $v_3 = 0,75$, et (v_n) est décroissante, on peut affirmer que tout $n \geqslant 3$, $v_n < 1$, soit $P(B) < P(A)$.
Donc l'événement A est le plus probable, sauf pour $n = 2$.