Rappels de calcul

1 Priorités opératoires et parenthèses

Dans une expression sans parenthèses, on effectue d'abord les puissances, puis les multiplications/divisions, et enfin les additions/soustractions.

Exemple $\quad 11 - 2 \times 3^2 = 11 - 2 \times 9 = 11 - 18 = -7.$

Lorsqu'il y a des parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Exemple $\quad (11 - 2^3) \times 4 = (11 - 8) \times 4 = 3 \times 4 = 12.$

2 Fractions

Dans ce paragraphe, a, b, c, et d sont des nombres réels, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Multiplication et division de fractions

Multiplication de fractions : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Exemple $\quad \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{21}$

Division de fractions : Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Avec de plus $c \neq 0$, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Exemple $\quad \frac{2}{9} \div \frac{5}{4} = \frac{2}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{45}$

Fraction multipliée par un nombre : $k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$

Exemple $\quad 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}.$

Addition et soustraction de fractions

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Exemple $\quad \frac{5}{3} - \frac{1}{4} = \frac{20}{12} - \frac{3}{12} = \frac{20 - 3}{12} = \frac{17}{12}$

Simplification de fractions

On peut simplifier lorsqu'un même nombre (non nul) est en facteur au numérateur et au dénominateur : avec $k \neq 0$, $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

Exemple $\quad \frac{15}{24} = \frac{3 \times 5}{3 \times 8} = \frac{5}{8}.$

3 Puissances de 10, puissances

Puissances de 10

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $10^n = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}$.

Pour tout entier n, $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$.

Exemple $\quad 10^5 = 100\,000$, et $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,000\,1$

Notation scientifique

La notation scientifique d'un nombre décimal non nul est l'écriture sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leqslant a < 10$), et n est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemple $\quad 5430 = 5,43 \times 10^3$, et $0.0623 = 6,23 \times 10^{-2}$

Puissances

Soit $a \neq 0$. On pose $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$.

Pour tout entier n, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Exemple $\quad 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$

$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$

4 Développement et factorisation

Une expression est développée si l'opération principale est une addition ou une soustraction.
Une expression est factorisée si l'opération principale est une multiplication ou une division.

Pour tous nombres a, b, c, d, et k.

$$\begin{aligned} k(a+b) &= ka+kb \\ (a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd \\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 \end{aligned}$$

Exemple
$3x(2x+11) = 6x^2+33x$.
$(2x-1)(3+x) = 6x+2x^2-3-x = 2x^2+5x-3$.
$(2x-7)(2x+7) = (2x)^2-7^2 = 4x^2-49$.

5 Équation du premier degré

On isole l'inconnue en regroupant tous les termes en x dans un seul membre.
Exemple
Résoudre l'équation $11x-4 = 2x+1$.

$$\begin{aligned} 11x-4 &= 2x+1 \\ 11x-2x &= 1+4 \\ 9x &= 5 \\ x &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

6 Équation produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$A \times B = 0 \text{ si et seulement si } (A=0 \text{ ou } B=0).$$

Exemple
$(4x-1)(5-x) = 0$
ssi $(4x-1=0$ ou $5-x=0)$ ssi $\left(x=\frac{1}{4}\right.$ ou $\left.x=5\right)$

7 Équation $x^2 = a$ et racines carrées

Soit a un nombre réel.

- Si $a>0$, l'équation $x^2=a$ admet deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a=0$, l'équation $x^2=0$ a une seule solution qui est 0.
- Si $a<0$, l'équation $x^2=a$ n'a pas de solution réelle.

Exemple
L'équation $x^2=25$ admet deux solutions qui sont $\sqrt{25}=5$ et $-\sqrt{25}=-5$.

8 Compléments

Les 3 identités remarquables
Pour tous nombres a et b, on a

$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$$

Propriétés des puissances et des racines carrées

Soient a et b des réels non nuls, et n et p des entiers relatifs (positifs ou négatifs).

1. $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
2. $a^n \times a^p = a^{n+p}$
3. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$
4. $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
5. $(a^n)^p = a^{np}$
6. $(ab)^n = a^n \times b^n$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Soient a et b des nombres positifs ou nuls.

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
2. Si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$