**CRSA2 – Correction du devoir maison n° 3**

**Exercice 1 (17 page 39)**

À l'aide d'une intégration par parties,

calculer $I = \displaystyle\int_0^1 (3x-1)\exp(3x)\ \mathrm{d}x$.

On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{3x}$ et $v(x) = 3x - 1$.

Alors, $u(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ et $v'(x) = 3$.

$$\begin{aligned}
I &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}(3x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} \times 3\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{3x}(3x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}(\mathrm{e}^3(3-1) - \mathrm{e}^0(0-1)) - \left[\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_0^1 \\
&= \frac{2\mathrm{e}^3+1}{3} - \frac{1}{3}(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^0) \\
&= \frac{\mathrm{e}^3+2}{3}
\end{aligned}$$

$I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\ \mathrm{d}x$.

On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$.

Alors, $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
I &= [u(x)v(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \times \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 1\ln(1) - \int_1^{\mathrm{e}} 1\ \mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - 0 - [x]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

**Exercice 2 (n° 35 page 42)**

On pose, pour tout entier naturel $n$ non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln(x))^n\ \mathrm{d}x$, et $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ \mathrm{d}x$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3-1}{3}$.
2. Calculer $I_1$ avec une IPP.

   $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\ \mathrm{d}x$.

   On pose $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$. Puis $u(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left[\frac{1}{3}x^3 \times \ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^3 \ln(\mathrm{e}) - 1^3 \ln(1)}{3} - \frac{1}{3} \times I_0 \\
&= \frac{\mathrm{e}^3 - 0}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} \\
&= \frac{3\mathrm{e}^3 - (\mathrm{e}^3 - 1)}{9} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9}
\end{aligned}$$

3. Exprimons $I_{n+1}$ par une IPP.
   $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln(x))^{n+1} \,\mathrm{d}x$.
   On pose $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$.
   Puis $u(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ et $v'(x) = (n+1) \times (\ln x)^n \times \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left[\frac{1}{3}x^3 \times (\ln(x))^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}x^2 \times (n+1) \times (\ln x)^n \times \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^3(\ln \mathrm{e})^{n+1} - 1^3(\ln 1)^{n+1}}{3} - \frac{(n+1)}{3} \times \int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln(x))^n \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{e}^3 - 0}{3} - \frac{n+1}{3} \times I_n
\end{aligned}$$

   Donc $3 \times I_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)I_n$, ou encore $3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3$.
4. En déduire $I_2$.
   Avec $n = 1$ dans la relation précédente, on obtient $3I_2 + 2I_1 = \mathrm{e}^3$.
   Donc $3I_2 = \mathrm{e}^3 - 2I_1 = \mathrm{e}^3 - 2 \times \dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{9} = \dfrac{5\mathrm{e}^3 - 2}{9}$.
   Enfin, $I_2 = \dfrac{5\mathrm{e}^3 - 2}{27}$.
5. Montrer que pour tout entier $n$ non nul, $I_n \geqslant 0$.
   On sait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Et sur l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$, on a $\ln(x) \geqslant 0$, donc $(\ln x)^n \geqslant 0$.
   Ainsi, pour tout $x \in [1;\mathrm{e}]$, $x^2(\ln x)^n \geqslant 0$.
   Par positivité de l'intégrale (si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \geqslant 0$), il vient pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \geqslant 0$.
6. Déduire de la question 4 que pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^3}{n+1}$.
   On sait que $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Donc $\mathrm{e}^3 - (n+1)I_n = 3I_{n+1} \geqslant 0$.
   Donc $(n+1)I_n \leqslant \mathrm{e}^3$, et $I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^3}{n+1}$.
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   On sait que pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^3}{n+1}$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^3}{n+1} = 0$.
   Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.