Chapitre 4 : Fonctions de référence

I Fonctions affines

Définition
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est affine s'il existe des réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Propriété
Soient a et b deux réels, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Alors la courbe représentative de f est ....
Cette droite a pour coefficient directeur ...
Son ordonnée à l'origine est ....

Propriété (sens de variation)
Soient a et b deux réels, et f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Alors

1. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ssi ...
2. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ssi ...
3. f est constante sur $\mathbb{R}$ ssi ...

Exercice 1
Pour chaque fonction, donner son sens de variation et tracer la représentation graphique.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 6$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{3}x + 1$.

II Fonctions du second degré

Voir le chapitre 1.

Théorème
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
La courbe représentative de f est un parabole.
Son sommet est le point $S\,(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$.
La droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ (parallèle à (Oy)) est axe de symétrie de la courbe.
Lorsque ...... la parabole est tournée vers le haut.
Lorsque ...... la parabole est tournée vers le bas.

Exercice 2
Déterminer le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-2; 6]$ par $f(x) = -x^2 + 6x + 11$.

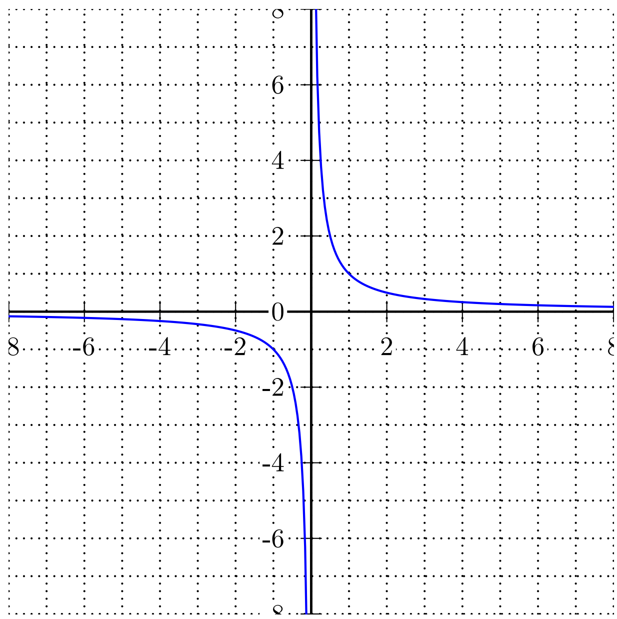
III La fonction inverse

Définition
La fonction inverse est définie pour tout x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est donc $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Théorème
La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, et décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

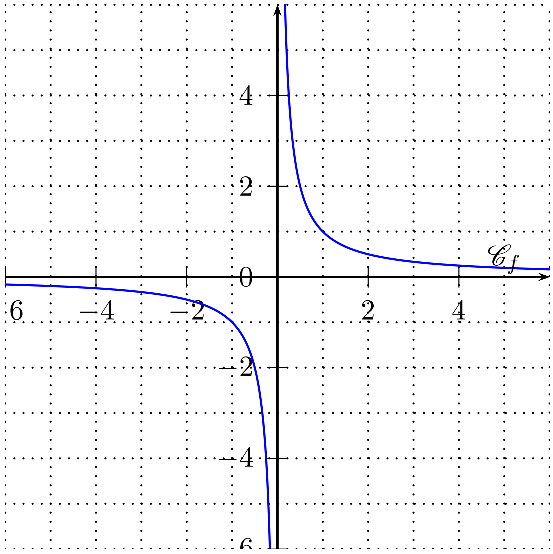
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Remarque
La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.
L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe.

Exercice 3 (Équation $\dfrac{1}{x} = x + \dfrac{3}{2}$)
On note $f(x) = \dfrac{1}{x}$. La courbe de f est donnée ci-dessous.



1. Tracer la courbe de la fonction $g(x) = x + \dfrac{3}{2}$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $\dfrac{1}{x} = x + \dfrac{3}{2}$.
3. Soit $x \neq 0$. Montrer que $\dfrac{1}{x} = x + \dfrac{3}{2}$ équivaut à $2x^2 + 3x - 2 = 0$.
4. Retrouver le résultat de la question 2.

IV La fonction valeur absolue

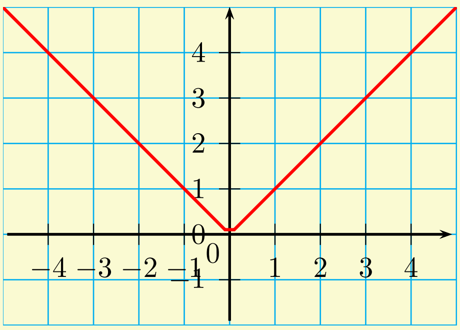
Définition
La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exemple :
$|5| = 5$, et $|-7| = 7$.

Exercice 4
Calculer $|-1-\sqrt{7}|$, $|2+\sqrt{5}|$, $|3-\pi|$

Remarque
Une valeur absolue est toujours positive ou nulle.

Propriété (Courbe représentative)
Par définition, la fonction valeur absolue est affine par morceaux.



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x \rvert$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

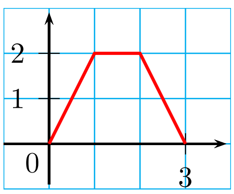
Exercice 5
Exprimer sans valeur absolue $|x+3|$, et $|-2x+28|$.

V Fonctions sinus et cosinus

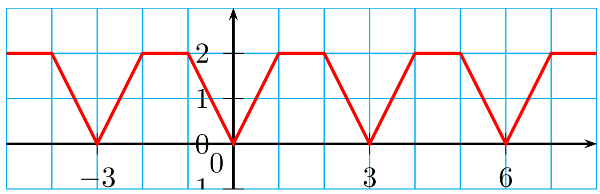
Définition
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $T > 0$ un nombre strictement positif.
   On dit que f est périodique de période T (ou T-périodique) lorsque pour tout x réel :
   $$f(x+T) = f(x).$$
2. On dit que f est paire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
   La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. On dit que f est impaire si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
   La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à O (l'origine du repère).

Conséquence graphique
Lorsqu'une fonction est T-périodique, sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$ (et aussi $2T\vec{i}$, $3T\vec{i}$, ..., $-T\vec{i}$, ...).
Il suffit alors de connaître sa courbe sur n'importe quel intervalle de longueur T (par exemple $[0;T]$) pour pouvoir la compléter entièrement par des translations.



f périodique $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ de période 3



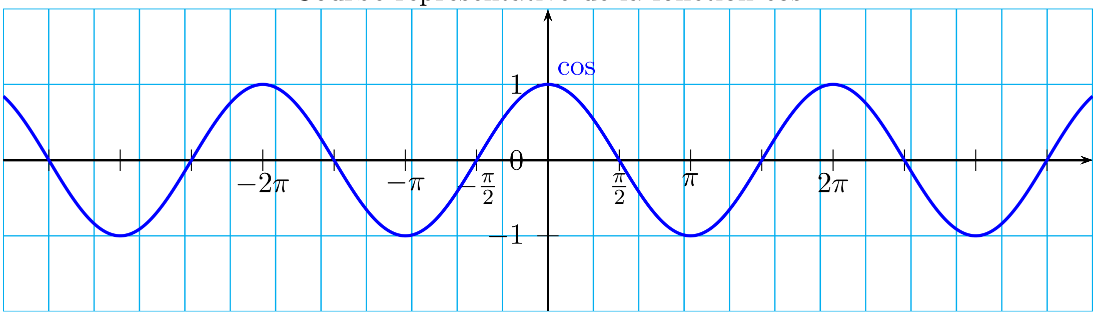
Théorème

1. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
2. La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x)\\ \sin(-x) &= -\sin(x)\end{aligned}$$
3. Tableaux de variation sur $[0; 2\pi]$.

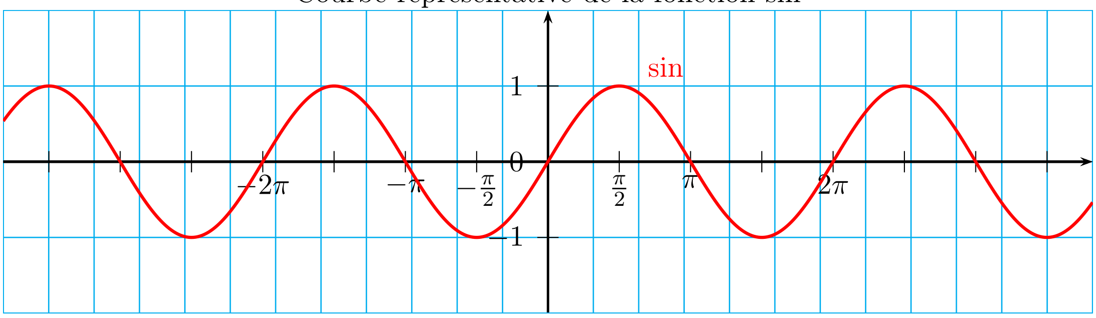
x	0		π		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

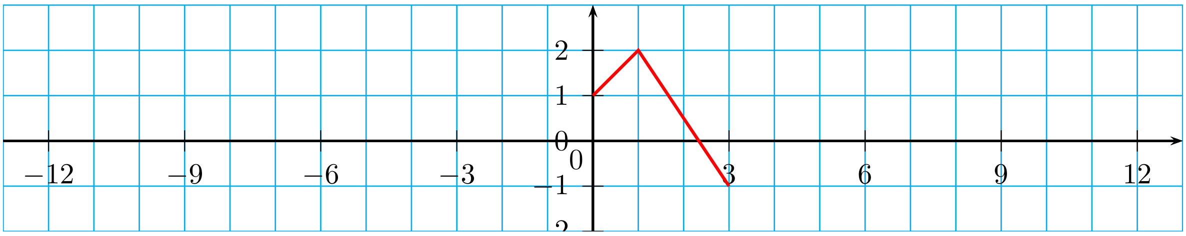
Courbe représentative de la fonction cos



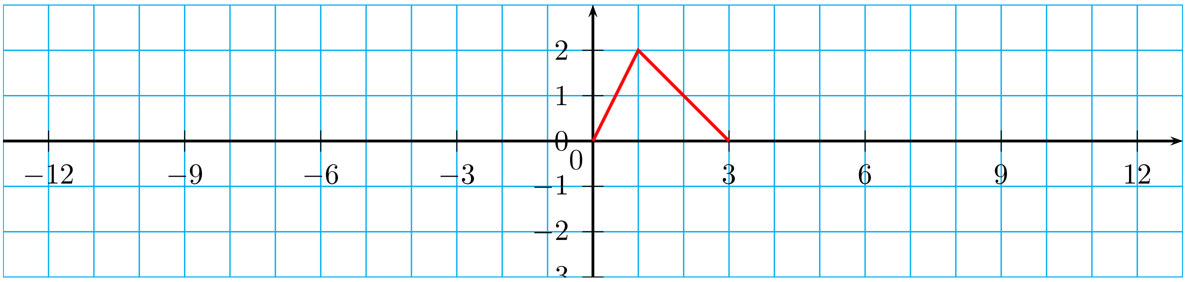
Courbe représentative de la fonction sin



Exercice 6
On donne une partie de la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Compléter le tracé sachant que f est périodique de période 6 et paire.

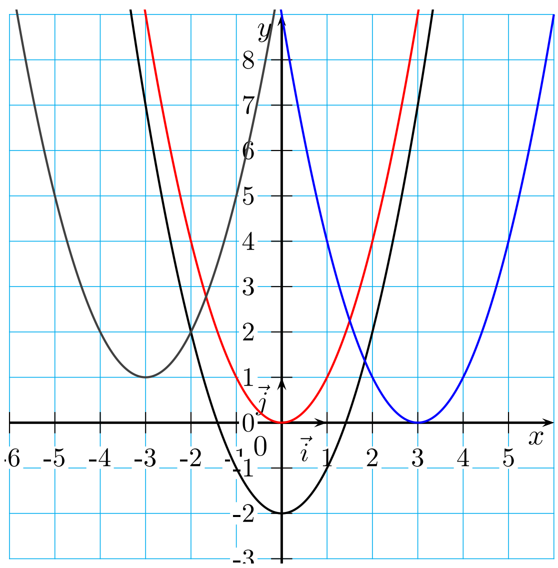


Exercice 7
On donne une partie de la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Compléter le tracé sachant que f est périodique de période 6 et impaire.



VI Fonctions associées

Exercice 8
Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative.
$f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 - 2$; $h(x) = (x-3)^2$; $i(x) = (x+3)^2 + 1$.



Théorème
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction u dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Soient a et b deux nombres réels.

1. Si f est définie par $f(x)=u(x)+b$, alors $\mathcal{C}_f$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $b\vec{j}$.
2. Si g est définie par $g(x)=u(x-a)$, alors $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $a\vec{i}$.
3. Si h est définie par $h(x)=u(x-a)+b$, alors $\mathcal{C}_h$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$.
4. Si v est définie par $v(x)=|u(x)|$, alors :
   — lorsque $u(x)\geqslant 0$, $\mathcal{C}_v$ est confondue avec la courbe de $\mathcal{C}$,
   — et lorsque $u(x)<0$, $\mathcal{C}_v$ est la symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.