Nom(s) :
Prénom(s) :

Devoir maison 6
À rendre pour le vendredi 19 janvier 2018

Exercice 1
Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$ est croissante et majorée par 7.
En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2
Partie 1
On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \text{ et} \\ \text{pour tout } n \geqslant 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{8}(u_n)^2 + u_n - 2 \end{cases}$$

En posant $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + x - 2$, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

1. Placer u_0 sur l'axe des abscisses et, en s'aidant du graphique, construire les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Vérifier par le calcul u_1 et u_2.
3. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ? sur sa convergence ?

Partie 2
On considère maintenant la suite (V_n) définie par $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n), \quad n \geqslant 0 \end{cases}$, toujours avec la fonction $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + x - 2$.

1. Construire de même les premiers termes de la suite (V_n) sur l'axe des abscisses (au moins jusqu'à V_4). Utiliser une couleur différente pour la construction des premiers termes de (V_n) .
2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de (V_n) ?
3. Que peut-on conjecturer sur sa convergence ?
4. On admet que (V_n) converge vers l'unique solution négative de l'équation $f(x) = x$.
   Déterminer la limite de la suite (V_n) par le calcul.
5. Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|V_{n_0} + 4| < 10^{-4}$.
6. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0.