Correction du devoir maison n° 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = -4 + \dfrac{u_n}{5}$.

1. Montrer que, pour tout entier n, $-6 \leqslant u_n \leqslant 0$.
   On raisonnne par récurrence.
   Initialisation
   On a $u_0 = 0$, donc $-6 \leqslant u_0 \leqslant 0$.
   Hérédité
   Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $-6 \leqslant u_k \leqslant 0$.
   Montrons $-6 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0$.
   $-6 \leqslant u_k \leqslant 0$, donc $\dfrac{-6}{5} \leqslant \dfrac{u_k}{5} \leqslant 0$,
   puis $\dfrac{-6}{5} - 4 \leqslant \dfrac{u_k}{5} - 4 \leqslant 0 - 4$,
   soit $-5,2 \leqslant u_{k+1} \leqslant -4$.
   On a donc bien $-6 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0$.
   La propriété est héréditaire.
   Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $-6 \leqslant u_n \leqslant -4$.
2. Conjecturer les variations de la suite (u_n), et démontrer votre conjecture en utilisant une démonstration par récurrence.
   $u_0 = 0$, $u_1 = -4+0 = -4$, $u_2 = -4-\dfrac{4}{5} = -4,8$, $u_3 = -4,96$.
   En observant les premiers termes de (u_n), il semble que cette suite soit strictement décroissante.
   On va donc montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$.
   Initialisation
   On a vu que $u_0 = 0$ et $u_1 = -4$.
   O a donc bien $u_1 < u_0$.
   Hérédité
   Considérons un entier $k \geqslant 0$, et supposons que $u_{k+1} < u_k$.
   Alors, $\dfrac{1}{5}u_{k+1} < \dfrac{1}{5}u_k$, puis $\dfrac{u_{k+1}}{5} - 4 < \dfrac{u_k}{5} - 4$.
   On a donc $u_{k+2} < u_{k+1}$.
   L'hérédité est établie.
   Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Correction du devoir maison n° 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = -4 + \dfrac{u_n}{5}$.

1. Montrer que, pour tout entier n, $-6 \leqslant u_n \leqslant 0$.
   On raisonnne par récurrence.
   Initialisation
   On a $u_0 = 0$, donc $-6 \leqslant u_0 \leqslant 0$.
   Hérédité
   Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $-6 \leqslant u_k \leqslant 0$.
   Montrons $-6 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0$.
   $-6 \leqslant u_k \leqslant 0$, donc $\dfrac{-6}{5} \leqslant \dfrac{u_k}{5} \leqslant 0$,
   puis $\dfrac{-6}{5} - 4 \leqslant \dfrac{u_k}{5} - 4 \leqslant 0 - 4$,
   soit $-5,2 \leqslant u_{k+1} \leqslant -4$.
   On a donc bien $-6 \leqslant u_{k+1} \leqslant 0$.
   La propriété est héréditaire.
   Conclusion : on a montré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $-6 \leqslant u_n \leqslant -4$.
2. Conjecturer les variations de la suite (u_n), et démontrer votre conjecture en utilisant une démonstration par récurrence.
   $u_0 = 0$, $u_1 = -4+0 = -4$, $u_2 = -4-\dfrac{4}{5} = -4,8$, $u_3 = -4,96$.
   En observant les premiers termes de (u_n), il semble que cette suite soit strictement décroissante.
   On va donc montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$.
   Initialisation
   On a vu que $u_0 = 0$ et $u_1 = -4$.
   O a donc bien $u_1 < u_0$.
   Hérédité
   Considérons un entier $k \geqslant 0$, et supposons que $u_{k+1} < u_k$.
   Alors, $\dfrac{1}{5}u_{k+1} < \dfrac{1}{5}u_k$, puis $\dfrac{u_{k+1}}{5} - 4 < \dfrac{u_k}{5} - 4$.
   On a donc $u_{k+2} < u_{k+1}$.
   L'hérédité est établie.
   Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est strictement décroissante.