

Correction du devoir de mathématiques n° 1

Correction du Sujet 1

Exercice 1 (8 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

On appelle \mathcal{P} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{P} avec l'axe des abscisses.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2}{-2} = 3. \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2}{-2} = 1.$$

La parabole coupe l'axe des abscisses en les points $A(1; 0)$ et $B(3; 0)$.

2. Étudier le signe de f sur \mathbb{R} . Justifier.

Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

3. Dresser le tableau de variation de f . Justifier.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2. \quad \beta = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(2; 1)$.

Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		1	

4. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$.

Étudier la position relative de la parabole \mathcal{P} et de la droite (d) .

On étudie le signe de $f(x) - (2x - 3)$.

$$f(x) - (2x - 3) = -x^2 + 4x - 3 - 2x + 3 = -x^2 + 2x = x(-x + 2).$$

$$x(-x + 2) = 0 \text{ ssi } x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Le trinôme $f(x) - (2x - 3)$ est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines.

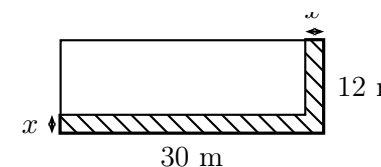
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f(x) - (2x - 3)$	-	0	+	0	-

Donc \mathcal{P} est en-dessous de (d) sur $] \infty; 0[\cup] 2; +\infty[$.

Et \mathcal{P} est au-dessus de (d) sur $] 0; 2[$.

Exercice 2 (4 points)

Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12 m. On souhaite aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre (le chemin est la partie hachurée).



La largeur x du chemin doit être supérieure ou égale à 0,8 m.

1. La partie restante du terrain est un rectangle de dimensions $(30 - x)$ et $(12 - x)$.

Son aire a pour expression :

$$(30 - x)(12 - x) = x^2 - 30x - 12x + 30 \times 12 = x^2 - 42x + 360.$$

On souhaite que cette aire soit supérieure à 280.

D'où l'inéquation :

$$x^2 - 42x + 360 \geq 280$$

$$x^2 - 42x + 80 \geq 0$$

2. On étudie le signe du trinôme $x^2 - 42x + 80$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444 = 38^2 > 0.$$

Le trinôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 - 38}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 + 38}{2} = 40$$

Le trinôme est positif (signe de a , ici $a = 1$) à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines.

x	$-\infty$	2	40	$+\infty$	
$x^2 - 42x + 80$	+	0	-	0	+

Donc $x^2 - 42x + 80 \geq 0$ sur $] -\infty; 2] \cup [40; +\infty[$.

D'après le contexte, la largeur x du chemin est comprise en 0,8 m et 12 m.

Donc la largeur du chemin doit être entre 0,8 m et 2 m.

Exercice 3 (2 points)

Déterminer tous les réels m tels que l'équation $x^2 + mx + 1 = 0$ n'ait pas de solution réelle.

C'est une équation du second degré avec pour coefficients $a = 1$, $b = m$ (paramètre), et $c = 1$.

Elle n'a pas de solution ssi $\Delta < 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4 = (m + 2)(m - 2).$$

$$(m + 2)(m - 2) = 0 \text{ ssi } m = -2 \text{ ou } m = 2.$$

On étudie le signe de l'expression du second degré en m , $m^2 - 4$. Elle prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici $a = 1 > 0$.

m	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$\Delta = m^2 - 4$	+	0	-	0

Ainsi, $\Delta < 0$ ssi $m \in] -2; 2[$.

L'équation $x^2 + mx + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle lorsque $m \in] -2; 2[$.

Exercice 4 (5 points)

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2$.

Calculer a_0 , a_1 et a_2 .

$$a_0 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 0\right)^2 = 3^2 = 9.$$

$$a_1 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

$$a_2 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 2\right)^2 = 2^2 = 4.$$

2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pour tout $n \geq 0$,

$$b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n + 1. \text{ Calculer } b_1 \text{ et } b_2.$$

$$b_1 = -\frac{2}{3}b_0 + 1 = -\frac{2}{3} \times 5 + 1 = -\frac{7}{3}.$$

$$b_2 = -\frac{2}{3}b_1 + 1 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{23}{9}.$$

3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_{n+1} = c_n - n^2 + 3. \text{ Calculer } c_1 \text{ et } c_2.$$

$$c_1 = c_0 - 0^2 + 3 = 3 - 0 + 3 = 6.$$

$$c_2 = c_1 - 1^2 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8.$$

4. Soit (d_n) la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = 3d_{n+1} + d_n$. Calculer d_2 et d_3 .

$$d_2 = 3d_1 + d_0 = 3 \times 1 + 1 = 4.$$

$$d_3 = 3d_2 + d_1 = 3 \times 4 + 1 = 13.$$

5. Soit (k_n) la suite définie par son premier terme $k_0 = 3$ et pour

tout entier $n \geq 0$, $k_{n+1} = 1 + \frac{k_n}{n+4}$. À l'aide de la calculatrice,

donner k_{10} arrondi à 10^{-3} . Aucune justification n'est demandée.

$$k_{10} \approx 1,084$$

Exercice 5 (bonus, 1 point)

Déterminer l'expression d'une fonction du second degré dont la courbe représentative passe par les points $A(1; 8)$, $B(-1; 6)$ et $C(2; 0)$.

On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a , b , et c réels, $a \neq 0$.

$$f(1) = 8, \text{ donc } a + b + c = 8.$$

$$f(-1) = 6, \text{ donc } a - b + c = 6.$$

$$f(2) = 0, \text{ donc } 4a + 2b + c = 0.$$

$$\text{On résout le système } \begin{cases} a + b + c = 8 & [L1] \\ a - b + c = 6 & [L2] \\ 4a + 2b + c = 0 & \end{cases}$$

$L1 - L2$ donne $2b = 2$, soit $b = 1$.

$$\text{ssi } \begin{cases} b = 1 \\ a + b + c = 8 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}, \text{ ssi } \begin{cases} b = 1 \\ a + c = 7 & [L3] \\ 4a + c = -2 & [L4] \end{cases}$$

$L4 - L3$ donne $3a = -2 - 7$, soit $a = -3$.

$$\text{ssi } \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \\ a + c = 7 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \\ c = 7 - (-3) = 10 \end{cases}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + x + 10$.

Exercice 6 (bonus, 1 point)

Notons $a = 2 - \sqrt{5}$.

$$\text{Alors, } a^2 = (2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5} = 1 + (8 - 4\sqrt{5}) = 1 + 4a.$$

Comme $a^2 = 4a + 1$, $a = 2 - \sqrt{5}$ est racine du trinôme $x^2 - 4x - 1$.