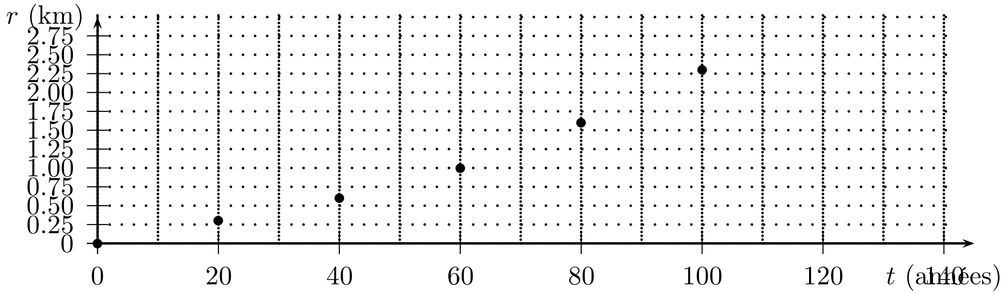
CRSA1. Correction du contrôle n° 9

Exercice 1 (10 points)

Le recul du glacier.

Année de mesure	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t	0	20	40	60	80	100
Recul r	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3



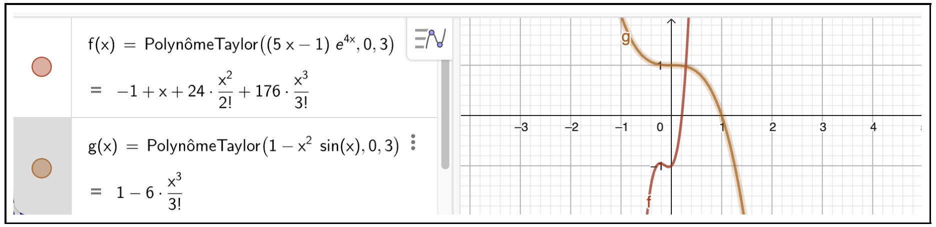
1. Ajustement affine
   (a) Construire le nuage de points $M_i(t_i, r_i)$ sur l'énoncé.
   (b) Équation de la droite d'ajustement affine de r en t.
   $\boxed{\text{On obtient } r = 0,023t - 0,162.}$
   (c) À partir du modèle affine obtenu, estimer par le calcul :
      i. le recul, puis la longueur du glacier en 2020,
      Pour $t = 120$, $r = 0,023 \times 120 - 0,162 = 2,598$.
      $\boxed{\text{En 2020, le recul est estimé à 2,598 km.}}$
      25,6-2,598=23,002. $\boxed{\text{Le glacier mesure alors 23,002 km.}}$
      ii. l'année de disparition du glacier.
      $r = 25,6$ ssi $0,023t - 0,162 = 25,6$ ssi $t = \dfrac{25,762}{0,023} \approx 1120$.
      1900+1120=3020. $\boxed{\text{Selon ce modèle, le glacier disparaîtrait en 3020.}}$
2. Ajustement exponentiel. On pose $y = \ln r$.
   (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

t	20	40	60	80	100
y	-1,204	-0,511	0	0,470	0,833

   (b) Droite d'ajustement affine de y en t par moindres carrés.
   $\boxed{y = 0,025t - 1,599}$
   (c) En déduire une expression de r en fonction de t.
   $\boxed{\ln r = 0,025t - 1,599, \text{ soit } r = e^{0,025t-1,599}.}$
   (d) À partir du modèle exponentiel obtenu, estimer par le calcul :
      i. le recul, puis la longueur du glacier en 2020,
      Pour $t = 120$, $r = e^{00,025\times 120-1,599} \approx 4,059$.
      $\boxed{\text{En 2020, le recul est estimé à 4,059 km.}}$
      $25,6 - 4,059 = 21,549$. $\boxed{\text{Le glacier mesure alors 21,541 km.}}$
      ii. l'année de disparition du glacier.
      $r = 25,6$ ssi $e^{0,025t-1,599} = 25,6$ ssi $0,025t - 1,599 = \ln(25,6)$ ssi $t = \dfrac{1,599 + \ln(25,6)}{0,025} \approx 194$.
      1900+194=2094. $\boxed{\text{Selon ce modèle, le glacier disparaîtrait en 2094.}}$

Exercice 2 (10 points)

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x-1)e^{4x}$ et $g(x) = 1 - x^2 \sin x$.



1. Équation de la tangente T_1 à la courbe C_f en 0, et T_2 à $\mathscr{C}_g$ en 0.
   $\boxed{\text{Pour } T_1 : y = x - 1, \text{ et pour } T_2 : y = 1.}$
2. Vérifier ces résultats par le calcul.
   $f(0) = -1$, et $f'(x) = 5e^{4x} + 4(5x-1)e^{4x} = e^{4x}(20x+1)$; donc $f'(0) = 1$.
   $T_1 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = x - 1$, donc $y = x - 1$.
   $g(0) = 1$, et $g'(x) = 0 - (2x\sin x + x^2 \cos x)$, donc $g'(0) = 0$
   $T_2 : y = g'(0)(x-0) + g(0) = 0x + 1 = 1$, soit $y = 1$.
3. Position relative de C_f par rapport à T_1, et celle de C_g par rapport à T_2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$24\dfrac{x^2}{2!}$		+	0	+	

$\boxed{\text{Au voisinage de 0, la courbe } C_f \text{ est toujours au-dessus de } T_1.}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-6\dfrac{x^3}{3!}$		+	0	−	

$\boxed{\text{Au voisinage de 0, la courbe } C_g \text{ est au-dessus de } T_2 \text{ pour } x < 0, \text{ et en-dessous de } T_2 \text{ pour } x > 0.}$