

Chapitre 9 : Probabilité conditionnelle. Indépendance.

I Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$, est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On note parfois aussi $P(B/A)$.

Les probabilités conditionnelles vérifient les propriétés des probabilités. En particulier,

Propriété

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

1. $0 \leq P_A(B) \leq 1$.

2. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.

3. S'il y a équiprobabilité sur Ω , $P_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$.

Remarque

Lorsqu'on calcule $P_A(B)$, l'ensemble de référence devient A .

Exemple :

Dans une classe de terminale de 32 élèves répartis en 18 filles et 14 garçons, il y a 20 élèves en spécialité LV2 Espagnol, dont 8 filles.

On choisit la fiche d'un élève au hasard, chaque fiche a autant de chance d'être choisie.

On note :

A : « L'élève est une fille ».

B : « L'élève suit la spécialité LV2 Espagnol ».

1. Calculer $P_A(B)$.

2. Calculer $P_B(A)$.

Propriété

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

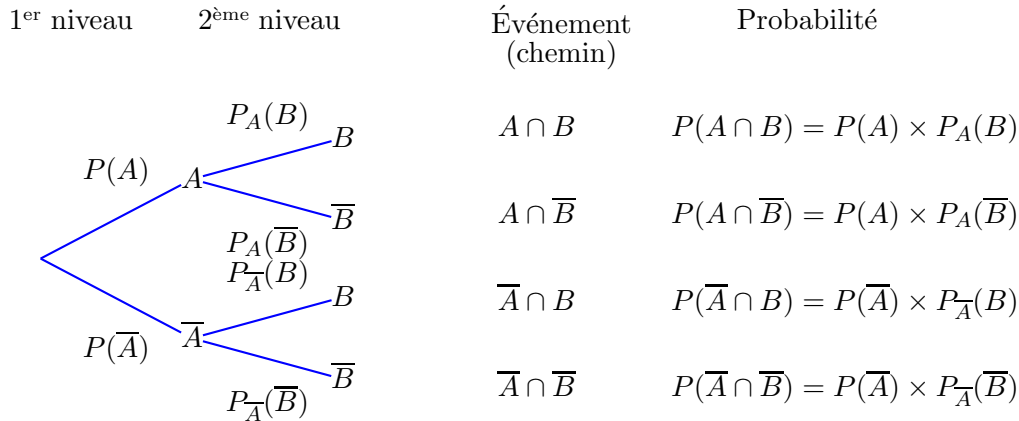
Alors, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

II Arbre de probabilité

Certaines situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles peuvent être représentées par des arbres pondérés.

On place les événements aux bouts des branches, et les probabilités sur les branches. Un chemin est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

Exemple :



Propriété

1. La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1.
2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur les branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

III Formule des probabilités totales

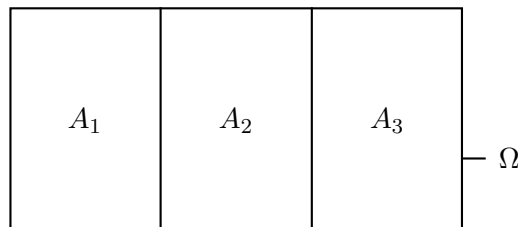
Définition

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de probabilités non nulles d'un univers Ω .

On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω lorsque :

1. $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$,
2. et les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$, i et j étant des entiers compris entre 1 et n).

Exemple :



A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers Ω .

Remarque

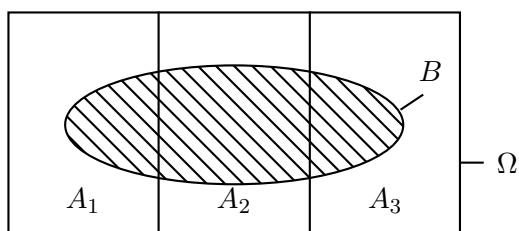
Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω .

Propriété (probabilités totales)

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de Ω .

Alors, pour tout événement B ,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}$$

**Remarque**

Soit A un événement tel que $P(A) \in]0; 1[$. Alors A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω .

Dans ce cas, la formule des probabilités totales s'écrit :

Pour tout événement B ,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \end{aligned}$$

IV Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

On dit que A et B sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Remarque

1. Lorsque $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, on dit que A et B sont indépendants.
2. Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur la probabilité de l'autre : $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Conséquence

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque

Ne pas confondre événements incompatibles et indépendants :

- A et B incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ (A et B ne peuvent pas être réalisés ensemble)
d'où $P(A \cap B) = 0$.
- A et B indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, (non nul si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).

Exemples : lancer successivement des pièces, des dés, répéter le tirage d'une bille dans une urne qui contient toujours le même nombre de billes (tirages avec remise) sont des expériences indépendantes.

Propriété

Si les événements A et B sont indépendants, alors :

1. $\bar{A}$ et B sont indépendants ;
2. A et $\bar{B}$ sont indépendants ;
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Démonstration (à connaître)

On va montrer que (A et B indépendants) $\Rightarrow$ ($\bar{A}$ et B indépendants).

Supposons que A et B soient indépendants.

On va montrer que $\bar{A}$ et B sont indépendants, soit $P_B(\bar{A}) = P(\bar{A})$.

On a toujours $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$.

$$\begin{aligned} P_B(\bar{A}) &= 1 - P_B(A) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(\bar{A}) \end{aligned}$$

En effet, comme A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$.

Donc $P_B(\bar{A}) = P(\bar{A})$.

Les événements $\bar{A}$ et B sont indépendants. □

Remarque

Dans le cas de deux événements A et B de probabilités non nulles, l'indépendance peut se lire sur un tableau d'effectifs ou un arbre de probabilités :

1. Tableau d'effectifs :

Lorsque A et B sont indépendants, le tableau d'effectifs (hors totaux) est un tableau de proportionnalité.

	A	$\bar{A}$	Total
B	1	2	3
$\bar{B}$	3	6	9
Total	4	8	12

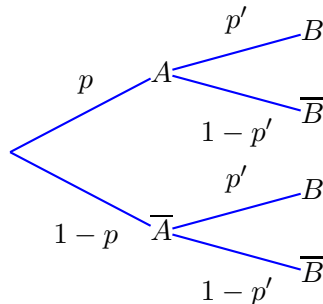
$$P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$$P_A(B) = \frac{1}{4}. \text{ Donc } P(B) = P_A(B).$$

A et B sont indépendants.

2. Arbre de probabilité : A et B sont indépendants ssi $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$.

Autrement dit, on retrouve les mêmes probabilités conduisant à B sur le 2^e niveau de branche, que l'on parte de A ou de $\bar{A}$.

**Exercice 1**

On se propose de démontrer le résultat énoncé dans la remarque précédente :

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.

1. Implication directe.

On suppose que A et B sont indépendants. Montrer que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.

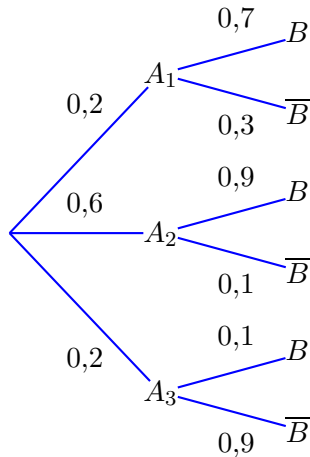
2. Réciproque.

On suppose que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$. Montrer que A et B sont indépendants.

V Exercices

Exercice 2

On donne l'arbre pondéré suivant.



1. Montrer que A_1 et B sont indépendants.

2. Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?

3. Les événements A_3 et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3

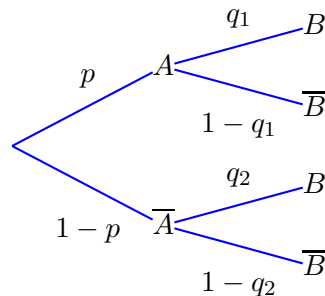
On se propose de démontrer le résultat énoncé dans la remarque précédente :

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.

1. Implication directe.

On suppose que A et B sont indépendants. Montrer que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.



2. Réciproque.

On suppose que $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$. Montrer que A et B sont indépendants.

Exercice 4 (Polynésie juin 2012)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 80]$.

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les événements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?