1G. Correction du devoir maison n° 3

Exercice 1

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-5}{n+3}$ est croissante et majorée par 1.

En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Sens de variation

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1-5}{n+1+3} - \frac{n-5}{n+3} \\ &= \frac{n-4}{n+4} - \frac{n-5}{n+3} \\ &= \frac{(n-4)(n+3)-(n-5)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n^2-n-12-(n^2-n-20)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{8}{(n+3)(n+4)} > 0 \end{aligned}$$

   En effet, $8 > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, donc $n+3 > 0$, et $(n+4) > 0$.

   Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Majoration par 1

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

   $u_n - 1 = \dfrac{n-5}{n+3} - \dfrac{n+3}{n+3} = \dfrac{n-5-(n+3)}{n+3} = \dfrac{-8}{n+3} < 0$, car $-8 < 0$ et $n+3 > 0$.

   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

   La suite (u_n) est majorée par 1.

3. Conclusion.

   Toute suite croissante est minorée par son premier terme.

   On sait que (u_n) est croissante.

   $u_0 = \dfrac{0-5}{0+3} = \dfrac{-5}{3}$.

   Donc (u_n) est minorée par $-\dfrac{5}{3}$.

   Par ailleurs, elle est majorée par 1.

   La suite (u_n) est bornée, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on l'encadrement $-\dfrac{5}{3} \leqslant u_n < 1$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite d'efinie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{5^n}{3 \times 2^n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

   $u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{3 \times 2^{n+1}}$.

   Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5^{n+1}}{3 \times 2^{n+1}} - \frac{5^n \times 2}{3 \times 2^n \times 2} \\ &= \frac{5^{n+1} - 2 \times 5^n}{3 \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{5^n(5-2)}{3 \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{3 \times 5^n}{3 \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{5^n}{2^{n+1}} > 0 \end{aligned}$$

   En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n > 0$ et $2^{n+1} > 0$.

   Donc (u_n) est croissante.

2. Montrer qu'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Déterminer q.

   $u_{n+1} = \dfrac{5^{n+1}}{3 \times 2^{n+1}} = \dfrac{5^n \times 5}{3 \times 2^n \times 2} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5^n}{3 \times 2^n} = \dfrac{5}{2} \times u_n$.

   Le réel $q = \dfrac{5}{2}$ convient.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5}{2} \times u_n$.

   Cela montre que la suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{2}$.