Exercices sur le second degré

Exercice 1 (positions relatives)

Étudier par le calcul la position relative des courbes de f et de g.

Rappel de la méthode : on étudie le signe de $f(x) - g(x)$. Sur les intervalles où $f(x) - g(x) > 0$, $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

1. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$, et $g(x) = -x - 3$.
2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$, et $g(x) = x - 3$.

Exercice 2 (paramètre)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
2. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.
3. Dresser le tableau de variation de f. Justifier.
4. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$. Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite (d).
5. Pour tout réel k, on considère la droite $(\mathcal{D}_k)$ d'équation $y = 2x + k$.
   Déterminer algébriquement le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{D}_k)$ et $\mathcal{P}$ suivant les valeurs de k.
6. Pour tout m réel, on note $\mathcal{T}_m$ la droite d'équation $y = mx$.
   Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $\mathcal{T}_m$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection.

Exercice 3 (variante)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. Justifier.
2. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.
3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-1 \leq x \leq 3$. Justifier.
4. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 3x + 6$.
   Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$.
5. Pour tout nombre k réel, on appelle $\mathscr{D}_k$ la droite d'équation $y = 3x + k$.
   Déterminer tous les réels k tels que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_k$ aient exactement deux points d'intersection.

Exercice 4

Étudier par le calcul la position relative des courbes de f et de g.

Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, et $g(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.

Indication : pour le signe de $f(x) - g(x)$, il faut factoriser en mettant l'expression au même dénominateur $2x$.

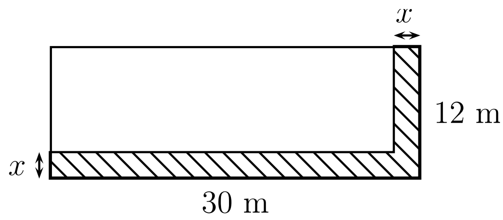
Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ et la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f(x) - g(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 4}{4x}$.
2. Étudier la position relative des courbes de f et de g. Justifier.

Exercice 6 (5 points)
Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et largeur 12 m. On souhaite aménager un chemin de largeur x (en mètres) le long de deux côtés consécutifs comme le montre la figure ci-contre (le chemin est la partie hachurée).



La largeur x du chemin doit être supérieure ou égale à 0,8 m.

1. On souhaite que la partie restante du terrain ait une aire supérieure à 280 m^2.
   Montrer que cela se traduit par l'inéquation
   $$x^2 - 42x + 80 \geqslant 0.$$
2. Résoudre cette inéquation et en déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

Exercice 7
Soit f une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$.

1. On considère l'affirmation suivante : « Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$. »
   (a) L'affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   (b) Énoncer la réciproque de l'implication précédente.
   (c) Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
2. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.
   « Si $a + b + c = 0$, alors 1 est racine de f. »

Exercice 8
Deux entiers naturels ont pour différence 7 et la différence entre leur produit et leur somme est égale à 43. Quels sont-ils ?

Exercice 9
Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second dont la courbe a pour sommet le point $S(-2; -5)$ et passe par le point $A(1; 4)$.

Exercice 10

Les extrémités A et B d'une ficelle sont fixées à deux clous distants de 65 cm.
On forme avec cette ficelle un triangle ABC comme l'indique la figure ci-contre.

1. Peut-on former un triangle rectangle en C dans le cas où la longueur de la ficelle est 85 cm ?
2. Est-il toujours possible de former un triangle rectangle en C, quelle que soit la longueur de la ficelle ?