Interrogation n° 8
Sujet 1

Exercice 1 (4 points)

Dans un sac, on met 2 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 2 billets de 20 €. Pour participer au jeu, il faut payer une mise de 25 €.

On tire successivement et sans remise deux billets du sac.

À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Soit X la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ). Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
3. Déterminer la loi de probabilité de X .
4. Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il intéressant pour le joueur (d'un point de vue financier) ?

Exercice 2 (6 points)

1. Compléter sur l'énoncé :
 - (a) Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r et de premier terme u_1 .
 Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dots$
 - (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite **géométrique** de raison différente de 0 et de 1.

2. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 4$ et de raison 5.
 - (a) Calculer V_{20} .
 - (b) Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \dots + V_{20}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Exprimer en fonction de n , $T_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$, et en déduire que la suite (T_n) est majorée par 3.

(b) Déterminer le plus petit entier n tel que $T_n \geq 2,9999$. Justifier.

Exercice 3 (6 points)

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros.

Le 1^{er} janvier 2018 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 12 euros de plus que le montant déposé le mois précédent. On note $u_1 = 30$ le montant déposé en janvier 2018, et pour tout $n \geq 1$, on note u_n le montant déposé le n^e mois.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n . Justifier.
3. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
4. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^e mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2018.
 - (a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n .
 - (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.

Exercice 4 (4 points + 1 bonus)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 90.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $V_n = u_n - 900$
 - (a) Calculer V_0 et V_1 .
 - (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
 - (c) Exprimer V_n en fonction de n .
3. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
4. Bonus
 Soit $n \geq 0$. Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Interrogation n° 8
Sujet 2

Exercice 5 (4 points)

Dans un sac, on met 3 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 1 billet de 20 €. Pour participer au jeu, il faut payer une mise de 21 €.

On tire successivement et sans remise deux billets du sac.

À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Soit X la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ). Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
3. Déterminer la loi de probabilité de X .
4. Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il intéressant pour le joueur (d'un point de vue financier) ?

Exercice 6 (6 points)

1. Compléter sur l'énoncé :
 - (a) Soit (u_n) est une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0 .
 Pour tout $n \geq 0$, $u_n = \dots$
 - (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite **arithmétique**.

2. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 11$ et de raison 6.
 - (a) Calculer V_{20} .
 - (b) Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \dots + V_{20}$.
3. Soit un entier $n \geq 1$.
 - (a) Exprimer en fonction de n , $T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et en déduire que la suite (T_n) est majorée par 1.

(b) Déterminer le plus petit entier n tel que $T_n \geq 0,9999$. Justifier.

Exercice 7 (6 points)

Jimi met de l'argent de côté pour acheter une guitare qui coûte 1500 euros.

Le 1^{er} janvier 2018 il dépose 30 euros. Le premier jour de chaque mois, il fait un nouveau dépôt de 15 euros de plus que le montant déposé mois précédent. On note $u_1 = 30$ pour le mois de janvier 2018, et pour tout $n \geq 1$, u_n le montant déposé le n^e mois.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n . Justifier.
3. Calculer u_{12} et interpréter le résultat en précisant le mois correspondant.
4. On note C_n le capital accumulé par Jimi le n^e mois. Ainsi, $C_1 = 30$ pour le mois de janvier 2018.
 - (a) Déterminer l'expression de C_n en fonction de n .
 - (b) Déterminer à quelle date il pourra acheter la guitare.

Exercice 8 (4 points + 1 bonus)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2000$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 50.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $V_n = u_n - 250$
 - (a) Calculer V_0 et V_1 .
 - (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
 - (c) Exprimer V_n en fonction de n .
3. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 1750 \times (0,8)^n + 250$.
4. Bonus
 Soit $n \geq 0$. Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.