1re G. Interrogation n° 7
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)

Compléter sur l'énoncé :

1. Donner la définition d'une suite (V_n) géométrique.
   Une suite (V_n) est géométrique si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre q.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times q$.
2. Terme général d'une suite arithmétique.
   Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 + nr$
3. Terme général d'une suite géométrique.
   Soit (V_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme V_1.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $V_n = V_1 \times q^{n-1}$
4. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$
5. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1.
   $$S = (\text{premier terme})\frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1-\text{raison}}$$

Exercice 2 (4 points)

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2000 unités seront produites, puis la production augmente de 10% chaque semaine. On note u_n le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine (on a donc $u_1 = 2000$). On arrondira les résultats à l'unité.

1. Calculer u_2 et u_3.
   $u_2 = u_1 + 0,1 \times u_1 = 2000 + 0,1 \times 2000 = 2000 \times 1,1 = 2200$.
   $u_3 = u_2 + 0,1 \times u_2 = 2200 \times 1,1 = 2420$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction u_n pour tout entier $n \geqslant 1$. Que peut-on en déduire ?
   Pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $u_{n+1} = u_n + 0,1u_n = u_n \times (1+0,1) = 1,1 \times u_n$.
   Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme $u_1 = 2000$
3. Exprimer u_n en fonction de n.
   Pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2000 \times 1,1^{n-1}$.
4. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.
   On cherche $S_{20} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.
   $S_{20} = u_1 \times \dfrac{1-q^{20}}{1-q} = 2000 \times \dfrac{1-1,1^{20}}{1-1,1} \approx 114550$.
   En 20 semaines, l'entreprise fabrique 114 550 systèmes d'alarme.

Exercice 3 (2 points)

1. Exprimer en fonction de n, $T_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \cdots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   C'est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de 1er terme $1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ et de raison $\dfrac{2}{3}$. Il y a $(n+1)$ termes puisqu'on va de $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ à $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   $$T_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$
2. Donner la valeur de T_{10} arrondie à 0,000 1 près.
   $T_{10} \approx 2,9653$.

Exercice 4 (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_1 = 2u_0 + 5 = 2 \times 1 + 5 = 7$.
   $u_2 = 2u_1 + 5 = 14 + 5 = 19$.
   $u_3 = 2u_2 + 5 = 43$.
   $\boxed{\text{D'où } u_1 = 7,\ u_2 = 19 \text{ et } u_3 = 43.}$
2. Soit (V_n) la suite définie par :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_n = u_n + 5.$$

(a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1}+5 \\ &= 2u_n+5+5 \\ &= 2\times u_n + 2\times 5 \\ &= 2(u_n+5) \\ &= 2V_n \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } (V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q=2.}$

(b) Exprimer V_n en fonction de n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times q^n$.
Or, $V_0 = u_0 + 5 = 1 + 5 = 6$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_n = 6\times 2^n}$.

3. Exprimer u_n en fonction de n.
Comme $V_n = u_n + 5$, il est clair que $u_n = V_n - 5$ pour tout entier n.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 6\times 2^n - 5.}$

4. Exprimer en fonction de n :
(a) $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.
D'après la formule sur la somme des termes d'une suite géométrique,

$$\begin{aligned} S &= V_0+V_1+\cdots+V_n \\ &= V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= 6\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 6\times(2^{n+1}-1) \end{aligned}$$

$\boxed{S = 6\times(2^{n+1}-1).}$

(b) $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

$$\begin{aligned} S' &= u_0+u_1+\cdots+u_n \\ &= (V_0-5)+(V_1-5)+\cdots+(V_n-5) \\ &= (V_0+V_1+\cdots+V_n)+\underbrace{(-5-5-\cdots-5)}_{n+1 \text{ fois}} \\ &= S-5(n+1) \\ &= 6\times(2^{n+1}-1)-5n-5 \\ &= 6\times 2^{n+1}-5n-11 \end{aligned}$$

$\boxed{S' = 6\times 2^{n+1} - 5n - 11.}$

Exercice 5 (2 points)
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 4$ et la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1. Compléter l'algorithme suivant qui renvoie u_n pour un entier n donné en entrée.

```
Entrer n
U ← 4
Pour K allant de 1 à n
    U ← 3U-2
FinPour
Afficher U
```

2. Écrire une fonction Python d'argument n qui renvoie u_n.

```
def Terme(n) :
    u=4
    for k in range(1,n+1):
        u=3*u-2
    return(u)
```

Exercice 6 (3 points)

1. Compléter la fonction Python qui a pour argument un entier non nul n et qui renvoie $A(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

```
def A(n) :
    A=0
    for k in range(1,n+1) :
        A=A+k**3
    return(A)
```

2. On pose $V_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + 2n^2 - 5$.
Écrire une fonction Python d'argument n (n entier naturel non nul) qui renvoie $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.

```
def S(n) :
    u=1
    s=u
    for k in range(1,n+1):
        u=u+2*(k-1)**2-5
        s=s+u
    return(s)
```