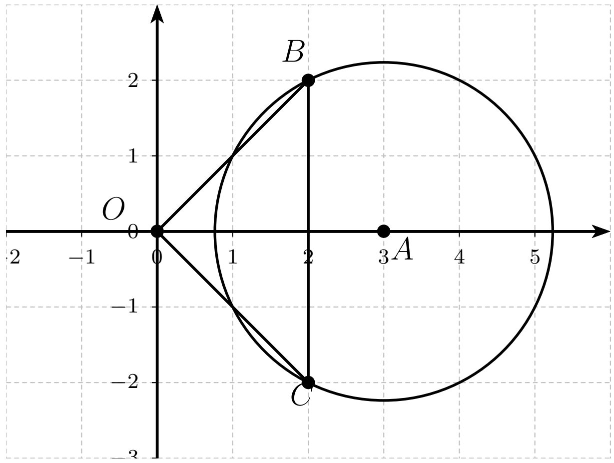
1STI3 - Mathématiques spécialité
Correction du travail à distance n°7

Exercice 1 (110 page 227)

Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = 3$, $b = 2 + 2\mathrm{i}$, et $c = 2 - 2\mathrm{i}$.

1. (a) Faire une figure.
   On A $A(3; 0)$, $B(2; 2)$ et $C(2; -2)$.



   (b) Module et argument de b.
   $|b| = |2 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   Soit θ un argument de b.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Donc $\theta = \arg b = \dfrac{\pi}{4}$.

   (c) Module eet argument de c.
   $|c| = |2 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   Soit θ un argument de c.
   $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Donc $\theta = \arg c = -\dfrac{\pi}{4}$.

   (d) Montrons que OBC est rectange isocèle.
   $OB = |b - 0| = |b| = 2\sqrt{2}$.
   $OC = |c - 0| = |c| = 2\sqrt{2}$.
   $BC = |c - b| = |2 - 2\mathrm{i} - (2 + 2\mathrm{i})| = |-4\mathrm{i}| = 4$.
   Comme $OB = OC$, le triangle OBC est isocèle en O.
   De plus, $BC^2 = 4^2 = 16$, et $OB^2 + OC^2 = 8 + 8 = 16$.
   Comme $BC^2 = OB^2 + OC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OBC est rectangle en O.
   Le triangle OBC est donc rectangle isocèle en O.

2. Soit E l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3| = \sqrt{5}$.

   (a) Vérifier que B et C appartiennent à E.
   $|b - 3| = |2 + 2\mathrm{i} - 3| = |-1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

$|c-3| = |2-2\text{i}-3| = |-1-2\text{i}| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.
Donc B et C appartiennent à E.

(b) On sait d'après le cours que $|z_B - z_A|$ est la distance AB.
En observant que $a = 3$, $|z-a|$ est donc la distance AM.
La relation $|z-3| = \sqrt{5}$ se traduit par $AM = \sqrt{5}$.
Donc E est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 2 (22 page 259)
Montrer que F est bien une primitive de f, puis déterminer la primitive qui vaut y_0 en x_0. $f(x) = 3x^2+1$, $F(x) = x^3+x$, et $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3x^2+1 = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f.
Ainsi, les primitives de f sont les fonctions G de la forme $G(x) = x^3+x+k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
et $G(1) = 0$ ssi $1^3+1+k = 0$ ssi $k = -2$.
La primitive de f qui vaut 0 en 1 est la fonction G définie par $G(x) = x^3+x-2$.

Exercice 3 (23 page 259)
Montrer que F est bien une primitive de f, puis déterminer la primitive qui vaut y_0 en x_0. $f(x) = 4x^3-3x$, $F(x) = x^4 - \dfrac{3}{2}x^2$ et $x_0 = 1$ et $y_0 = \dfrac{5}{2}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 4x^3 - \dfrac{3}{2} \times 2x = 4x^3-3x = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f.
Ainsi, les primitives de f sont les fonctions G de la forme $G(x) = x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
et $G(1) = \dfrac{5}{2}$ ssi $1^4 - \dfrac{3}{2} \times 1^2 + k = \dfrac{5}{2}$ ssi $k = 3$.
La primitive de f qui vaut $\dfrac{5}{2}$ en 1 est la fonction G définie par $G(x) = x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 3$.

Exercice 4 (24 page 259)
Montrer que F est bien une primitive de f, puis déterminer la primitive qui vaut y_0 en x_0. $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$, et $x_0 = \pi$ et $y_0 = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -(-\sin x) = \sin x = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f.
Ainsi, les primitives de f sont les fonctions G de la forme $G(x) = -\cos(x)+k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
et $G(\pi) = 0$ ssi $-\cos(\pi)+k = 0$ ssi $-(-1)+k = 0$ ssi $k = -1$.
La primitive de f qui vaut 0 en π est la fonction G définie par $G(x) = -\cos x - 1$.