

1re G. Correction du dm1

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- Pour tout réel x , $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
L'affirmation est fausse : l'égalité n'est pas vérifiée pour tous les réels.
En effet, en prenant $x = 1$, le premier membre vaut 0 et le deuxième vaut -4 .
- Il existe un réel x tel que $-2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x - 2$.
L'affirmation est vraie : l'égalité est vérifiée pour $x = 0$.

Exercice 2

- Pour tout réel x , on a :
d'une part

$$\begin{aligned} (x-1)x(x+1)(x+2) + 1 &= (x-1)(x+1)x(x+2) + 1 \\ &= (x^2-1)(x^2+2x) + 1 \\ &= x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} (x^2+x-1)^2 &= (x^2+x-1)(x^2+x-1) \\ &= x^4 + x^3 - x^2 + x^3 + x^2 - x - x^2 - x + 1 \\ &= x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout réel x , on a :

$$(x-1)x(x+1)(x+2) + 1 = (x^2+x-1)^2.$$

- En utilisant l'égalité précédente pour $x = 10$, on obtient :
 $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1 = (10^2 + 10 - 1)^2 = 109^2$.
On en déduit que $9 \times 10 \times 11 \times 12 + 1$ est le carré de 109.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $-(x-1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = -x^2 - 2x + 2 = f(x)$.
Donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
- On reconnaît la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1$, $\alpha = -1$, et $\beta = 3$.
La parabole est tournée vers le bas car $a = -1 < 0$, et a pour sommet le point $S(-1; 3)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	3		

- Soit (d) la droite d'équation $y = -x - 4$.

- Tracer dans le repère ci-contre la courbe de f et la droite (d) .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
D'une part, $f(x) - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 6$.
D'autre part, $(x+3)(2-x) = -x^2 - x + 6$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x-4) = (x+3)(2-x)$.
- En déduire le tableau de signe de $f(x) - (-x-4)$, puis la position relative de \mathcal{C}_f et (d) . On vérifiera la cohérence de ce résultat avec la graphique.

Valeurs clés :

$$x+3 = 0 \text{ ssi } x = -3, \text{ et } 2-x = 0 \text{ ssi } x = 2.$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$2-x$	+	+	0	-
$f(x) - (-x-4)$	-	0	+	0

On en déduit que lorsque $x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, $f(x) < -x - 4$.

Donc sur $] -\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, \mathcal{C}_f est en-dessous de (d) .

Lorsque $x \in]-3; 2[$, $f(x) > -x - 4$.

Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de (d) sur $] -3; 2[$.

Enfin $f(x) = -x - 4$ ssi $x = -3$ ou $x = 2$, donc \mathcal{C}_f et (d) se coupent aux points d'abscisses -3 et 2 .

On vérifie la cohérence de ces résultats avec le graphique.

