Exercices sur les matrices 2e partie
Chaînes de Markov

Exercice 1

Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard. L'étude révèle que :

— si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2,

— si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état "la personne pratique le ski de piste" et par $\overline{S}$ l'état "la personne pratique le snowboard". On note également pour tout entier naturel n :

— p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du $n^{\text{ième}}$ hiver,

— q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du $n^{\text{ième}}$ hiver,

— $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du $n^{\text{ième}}$ hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
3. Déterminer l'état probabiliste P_1. Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer M^2.
5. Déterminer l'état probabiliste P_2. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnement :

— l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives,

— l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi.

Chaque adhérent doit choisir un des deux types d'abonnement.

La première année, 80 % des adhérents choisissent l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement l'année suivante, tandis que 10 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement l'année suivante. Soit n un entier supérieur à 0. On note :

— a_n la probabilité qu'un adhérents ait un abonnement de type A la $n^{\text{ième}}$ année.

— b_n la probabilité qu'un adhérent ait un abonnement de type B la $n^{\text{ième}}$ année.

— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Donner P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_3.
5. En déduire la probabilité qu'un adhérent choisisse l'abonnement de type A la 3e année.

Exercice 3

On considère une chaîne de Markov à 3 états possibles : E, F et G.

On note M la matrice de transition.

1. Compléter la matrice M pour en faire une matrice de transition.
$$T = \begin{pmatrix} . & 0 & 0,4 \\ 1 & . & . \\ 0,2 & 0,1 & . \end{pmatrix}$$
2. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.

Exercice 4

On considère une chaîne de Markov à 4 états possibles : A, B, C et D. On note M la matrice de transition :

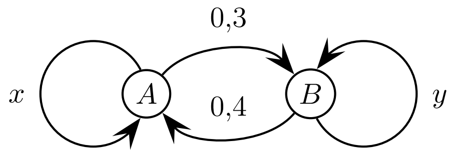
1. Compléter la matrice M pour en faire une matrice de transition.

$$T = \begin{pmatrix} . & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & . \\ . & 1 & . & . \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & . & . \end{pmatrix}$$

2. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.

Exercice 5

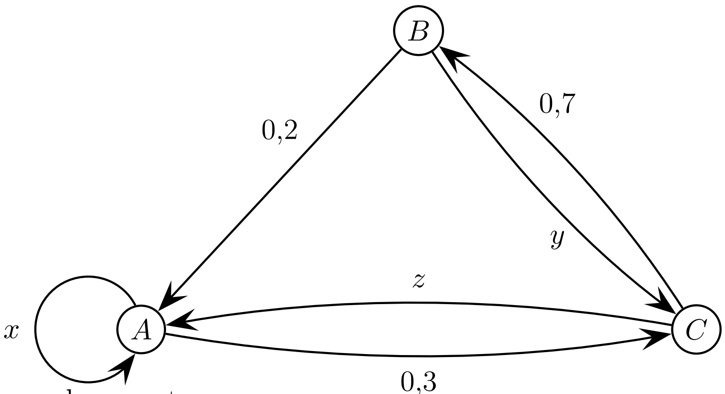
On considère le graphe probabiliste d'une chaîne de Markov à deux états A et B représenté ci-dessous.



1. Donner les nombres x et y.
2. Donner la matrice de transition.

Exercice 6

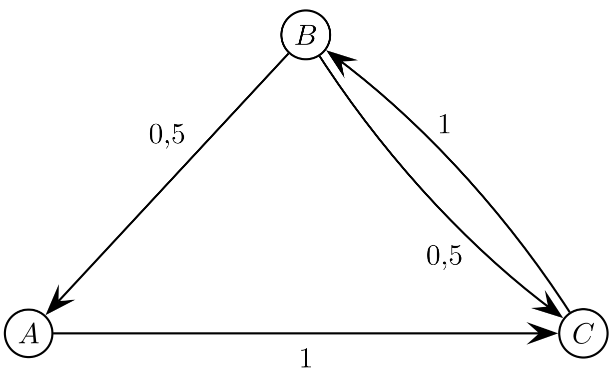
On considère le graphe probabiliste d'une chaîne de Markov à trois états A, B et C représenté ci-contre.



1. Donner les nombres x et y, z.
2. Donner la matrice de transition.

Exercice 7

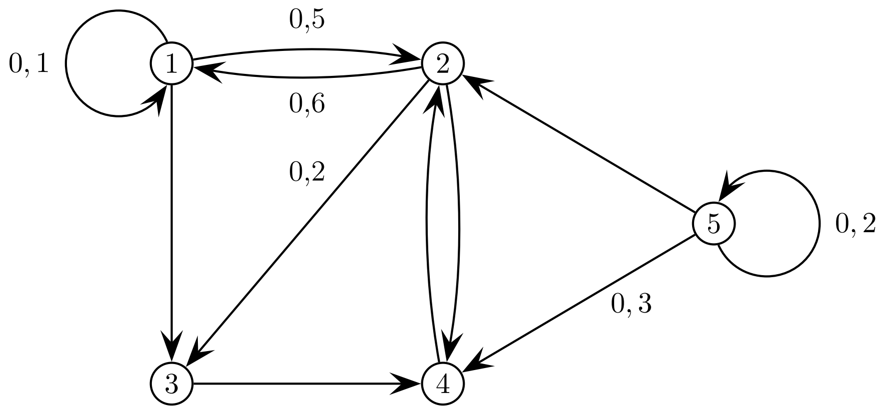
On donne le graphe probabiliste d'une chaîne de Markov à trois états A, B et C représenté ci-contre.



On note P_n la matrice probabiliste à l'étape n. On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer P_1, P_2 et P_3.

Exercice 8

On donne le graphe probabiliste d'une chaîne de Markov à cinq états 1, 2, 3, 4 et 5 représenté ci-contre.



1. Peut-on atteindre le sommet 1 du graphe en deux étapes, en partant de n'importe quel autre sommet ?
2. Recopier et compléter le graphe par les probabilités manquantes.
3. Donner la matrice de transition T.
4. Calculer T^2.
5. On note X_n la variable aléatoire égale à l'état atteint à l'étape n.
   Donner : $P_{(X_0=1)}(X_2 = 1)$; $P_{(X_0=3)}(X_2 = 3)$ et $P_{(X_0=2)}(X_2 = 4)$.
6. Justifier la réponse donnée à la question 1.

Exercice 9
Dans une région européenne, deux partis s'affrontent aux élections tous les 5 ans. En 2019, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % pour le parti Phénix. On admet qu'à partir de l'année 2019 :

— 14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.
— 6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.
— Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de cette région choisi au hasard.
On note H l'état "l'électeur vote pour le parti Hirondelle" et P l'état "l'électeur vote pour le parti Phénix".

1. Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
2. Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
3. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année 2019+ $5n$.
   Déterminer E_1 et E_4. Interpréter les résultats.
4. Montrer que pour tout entier n,on a : $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.
5. On note $u_n = h_n - 0,3$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) Exprimer h_n en fonction de n.
   (d) À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à $0,32$?

Exercice 10
Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points réguli'erement espacés sur le terrain. Lorsqu'un sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif. L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

— si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ de l'être aussi,
— si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 de l'être aussi.

On note p_n la probabilité que le $n^{\text{ieème}}$ sondage soit positif. On suppose que le premier sondage est positif : $p_1 = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Montrer que pour tout entier n,on a : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
3. On note $u_n = p_n - 0,2$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et donner ses éléments caractéristiques.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) Exprimer p_n en fonction de n.
   (d) Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter.

Exercice 11

On reprend le contexte de l'exemple 4 du cours.
La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle décrit dans l'exemple 4 puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie (sans être totalement efficace) et traitent immédiatement l'ensemble de la population.
L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination.
Ainsi $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la $n^{\text{ième}}$ semaine après la vaccination.
D'après l'étude du cours on a : $Q_0 = P_4 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$.

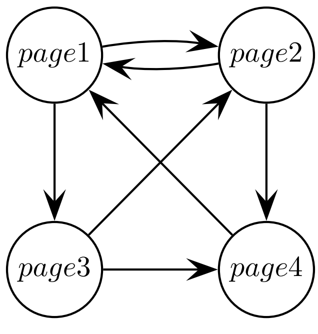
1. Tracer le graphe orienté associé à cette nouvelle chaîne de Markov.
2. Calculer B^2 et B^3.
3. Donner B^n pour tout entier $n \geqslant 2$.
4. En déduire Q_n pour tout entier $n \geqslant 2$.
5. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.

Exercice 12

Le réseau Internet peut être représenté comme un gigantesque graphe (non probabiliste), dont les sommets sont les pages, et les flèches les liens qui pointent d'une page à une autre.
Un moteur de recherche, pour être utile, doit classer les pages par ordre de pertinence.
Comment mesurer la pertinence d'une page ? L'algorithme PageRank utilisé par Google utilise une méthode probabiliste.
Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard.
Quand il est sur une page, il choisit :

— soit une page au hasard dans l'ensemble du reste du réseau avec une probabilité p ;
— soit une page parmi les liens disponibles depuis la page où il se trouve, avec la probabilité $1-p$.

Considérons par exemple un mini-web à quatre pages (représenté ci-contre), et prenons $p = 0,16$.



1. Dresser un graphe probabiliste orienté correspondant à la situation.
2. Donner la matrice de transition de la chaîne de Markov.
3. Supposons que l'internaute choisisse sa première page au hasard parmi les quatre. Quelle est la probabilité qu'il surfe sur chacune des pages à la 20e étape ?