2de. Correction du Dm8

Exercice 1 (Activité 1 page 67)

1. Liste des diviseurs de 284 et de 220.
   $284 = 1 \times 284 = 2 \times 142 = 4 \times 71$.
   Les diviseurs de 284 sont donc : 1 ;2 ;4 ;71 ;142 ;284.
   $220 = 1 \times 220 = 2 \times 110 = 4 \times 55 = 5 \times 44 = 10 \times 22 = 11 \times 20$.
   Les diviseurs de 220 sont : 1 ;2 ;4 ;5 ;10 ;11 ;20 ;22 ;44 ;55 ;110 ;220.
2. Somme des diviseurs propres de 284 et 220.
   La somme des diviseurs propres (autres que lui-même) de 284 est :
   $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.
   La somme des diviseurs propres de 220 est :
   $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.
   On observe que la somme des diviseurs propres de 220 est 284, et que la somme des diviseurs propres de 284 est 220.
   On dit que 220 ett 284 sont des nombres amicaux (ou amiables).

Exercice 2 (11 page 71)

On considère le nombre $M = \dfrac{5096}{4004}$.
En décomposant en facteurs premiers, $5096 = 2^3 \times 7^2 \times 13$, et $4004 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 13$.
Donc $M = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 13}{= 2^2 \times 7 \times 11 \times 13} = \dfrac{2 \times 7}{11} = \dfrac{14}{11}$.
Donc M est un nombre rationnel, et M n'est pas décimal car la fraction simplifiée a un 11 au dénominateur.
Rappel : les nombres décimaux sont les nombres qui ont une écriture fractionnaire simplifiée ne contenant que des puissances de 2 et de 5 au dénominateur.

Exercice 3 (12 page 123)

Dans un repère d'origine O, on donne $A(-2; 2)$ et $B(2; 4)$.

1. Soit $D(7; \frac{7}{2})$. Montrer que $(AB)//(OD)$.
   $AB)//(OD)$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} x_D - x_O \\ y_D - y_O \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} 7 \\ 7/2 \end{pmatrix}$.
   On peut remarquer que $\overrightarrow{OD} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AD}$.
   Sinon, $xy' - yx' = 4 \times \dfrac{7}{2} - 2 \times 7 = 14 - 14 = 0$.
   Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires, et $(AB)//(OD)$.
2. On donne $M(3; 1)$ et $N(1; 0)$. Montrer que $(AB)//(MN)$.
   $(AB)//(MN)$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.
   On a vu que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   On observe que $-2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires et les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Exercice 4 (105 page 80)

On pose $n = 10a + b$, avec a et$b$ entiers naturels.

1. Montrons que si $a - 2b$ est divisible par 7, alors n est divisible par 7.
   On sait que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7.
   On suppose que $a - 2b$ est multiple de 7.
   On cherche à voir $n = 10a + b$ comme une somme de multiples de 7.
   Il est clair que les nombres $7a$ et $7b$ sont des multiples de 7.
   Or, $7a + 3(a - 2b) + 7b = 7a + 3a - 6b + 7b = 10a + b = n$
   Comme on suppose que $(a - 2b)$ est multiple de 7, le nombre $3(a - 2b)$ est multiple de 7.
   Par somme de multiples de 7, $n = 7a + 3(a - 2b) + 7b$ est aussi multiple de 7.

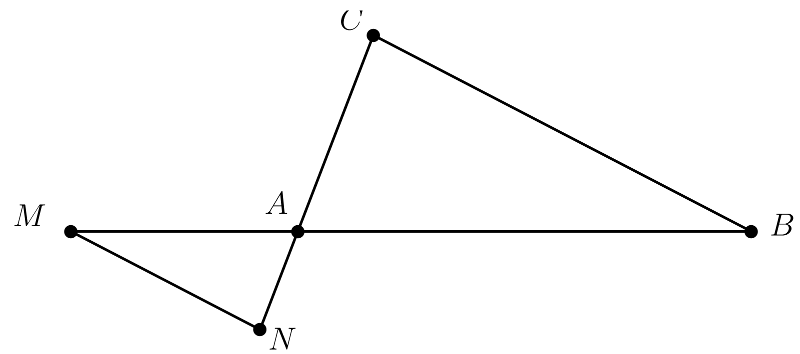
2. Montrons la réciproque : si n est multiple de 7, alors $a-2b$ est multiple de 7.
   On suppose que $n = 10a + b$ est multiple de 7.
   Alors, $(10a+b) - 7a = 3a + b$ est aussi multiple de 7 (par somme de deux multiples de 7).
   Enfin, $a - 2b = (10a+b) - 3(3a+b)$ est donc multiple de 7.
3. Déterminons alors si 574 est multiple de 7.
   On a $n = 574 = 10 \times 57 + 4$, donc, avec les notations précédentes, $a = 57$ et $b = 4$.
   On a montré aux questions 1 et 2 que $10a + b$ est multiple de 7 ssi $a - 2b$ est multiple de 7.
   $a - 2b = 57 - 2 \times 4 = 57 - 8 = 49$ est multiple de 7.
   Donc le nombre $n = 10a + b = 574$ est aussi multiple de 7.

Exercice 5 (76 page 75)
Utiliser des décompositions en facteurs premiers pour simplifier les fractions suivantes.

1. $224 = 2^5 \times 7$, et $280 = 2^3 \times 5 \times 7$.
   Donc $\dfrac{224}{280} = \dfrac{2^5 \times 7}{2^3 \times 5 \times 7} = \dfrac{2^2}{5} = \dfrac{4}{5}$.
2. $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$, et $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$.
   Donc $\dfrac{420}{882} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7^2} = \dfrac{2 \times 5}{3 \times 7} = \dfrac{10}{21}$.
3. $8800 = 2^5 \times 5^2 \times 11$, et $3775 = 5^2 \times 151$.
   $\dfrac{8800}{3775} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 11}{5^2 \times 151} = \dfrac{2^5 \times 11}{151} = \dfrac{352}{151}$.
4. $1056 = 2^5 \times 3 \times 11$, et $1596 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 19$.
   $\dfrac{1056}{1596} = \dfrac{2^5 \times 3 \times 11}{2^2 \times 3 \times 7 \times 19} = \dfrac{2^3 \times 11}{7 \times 19} = \dfrac{88}{133}$.

Exercice 6 (11 page 123)
ABC est un triangle, $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

1. Figure.



2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. Comme $\overrightarrow{AN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, N et C sont alignés.

Exercice 7 (64 page 127)
ABC est un triangle et D est tel que $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.
Montrons que $D \in (AC)$.
Cela revient à montrer que A, C, et D sont alignés, ce qui équivaut à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
On sait que $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$.
Donc $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})$, soit $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CA}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CA}$, ou encore $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, donc $D \in (AC)$.