Correction du devoir n° 3

1. a) Équation $3m^2+7m-6=0$.
   $\Delta = b^2-4ac = 49+72 = 121 = 11^2$.
   $\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-11}{6} = -3$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+11}{6} = \dfrac{2}{3}$.
   $\boxed{\text{Les solutions sont } -3 \text{ et } \dfrac{2}{3}.}$

   b) Signe de $3m^2+7m-6=0$.
   Le trinôme $3m^2+7m-6$ a pour racines -3 et $\dfrac{2}{3}$.
   Il prend le signe de a ($a=3>0$) à l'extérieur des racines.

m	$-\infty$		-3		$2/3$		$+\infty$
$3m^2+7m-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Valeur de m pour que (E) ne soit pas du second degré.
   (E) n'est pas une équation du second degré si et seulement si le coefficient de x^2 est nul, c'est à dire $m-1=0$, c'est à dire $m=1$.
   (E) s'écrit alors $-4x-5=0$ c'est à dire $x=-\dfrac{5}{4}$.
   $\boxed{\text{Donc, si } m=1 \text{, l'équation } (E) \text{ a une solution : } -\dfrac{5}{4}.}$

3. a) -1 est racine de (E) si et seulement si
   $(m-1)\times(-1)^2-4m\times(-1)+m-6=0$
   $m-1+4m+m-6=0$
   $6m-7=0$, ce qui équivaut à $m=\dfrac{7}{6}$
   $\boxed{-1 \text{ est racine de } (E) \text{ si et seulement si } m=\dfrac{7}{6}}.$

   b) 1 est racine de (E) si et seulement si
   $(m-1)\times(1)^2-4m\times(1)+m-6=0$
   $m-1-4m+m-6=0$
   $-2m-7=0$, soit enfin $m=-\dfrac{7}{2}$
   $\boxed{1 \text{ est racine de } (E) \text{ si et seulement si } m=-\dfrac{7}{2}.}$

   c) m pour que (E) ait une racine double.
   (E) a pour discriminant :
   $\Delta = (4m)^2-4(m-1)(m-6) = 16m^2-4(m^2-7m+6)$.
   $\Delta = 16m^2-4m^2+28m-24 = 12m^2+28m-24$.
   $\Delta = 4(3m^2+7m-6)$.
   Or on sait que (E) admet une racine double si et seulement si elle est du second degré ($m \neq 1$) avec $\Delta = 0$, c'est à dire $3m^2-7m-6=0$.
   D'après la question 1)a) :
   $\boxed{(E) \text{ admet une racine double ssi } m=-3 \text{ ou } m=\dfrac{2}{3}.}$

   d) (E) n'admet pas de racine réelle si et seulement si elle est du second degré avec $\Delta<0$,
   c'est à dire $3m^2-7m-6<0$.
   D'après la question 1)b) :
   $\boxed{(E) \text{ n'admet pas de racine réelle ssi } m \text{ appartient à } \left]-3;\dfrac{2}{3}\right[.}$
   On vérifie que sur cet intervalle $m \neq 1$.

   e) (E) admet deux racines réelles distinctes si et seulement si elle est du second degré avec $\Delta>0$.
   Cela revient à $m\neq 1$ et $3m^2-7m-6>0$.
   d'après la question 1)b) :
   $3m^2-7m-6>0$ ssi $m \in]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.
   Or, 1 appartient à cette réunion d'intervalles.
   $\boxed{\begin{array}{l}(E) \text{ admet deux racines réelles distinctes si et seulement si } m \\ \text{appartient à }]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[.\end{array}}$

   f) On a :
   Pour tout réel x, $(m-1)x^2-4mx+m-6<0$ si et seulement si (E) n'a pas de racine réelle et $m-1<0$,
   c'est à dire si et seulement si m appartient à $\left]-3;\dfrac{2}{3}\right[$ et $m<1$.
   c'est à dire si et seulement si m appartient à $\left]-3;\dfrac{2}{3}\right[$.
   Finalement,
   $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout réel } x,\ (m-1)x^2-4mx+m-6<0 \text{ si et seulement} \\ \text{si } m \text{ appartient à } \left]-3;\dfrac{2}{3}\right[\end{array}}.$