Chapitre 2 : Fonctions de référence

I Généralités sur les fonctions

Définition
Soit D une partie de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à tout nombre x appartenant à D un unique nombre réel $f(x)$.
Vocabulaire : On dit que

- x est la variable de f,
- D est l'ensemble de définition de f (souvent noté D_f),
- $f(x)$ est l'image de x par f.

On note parfois $f : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

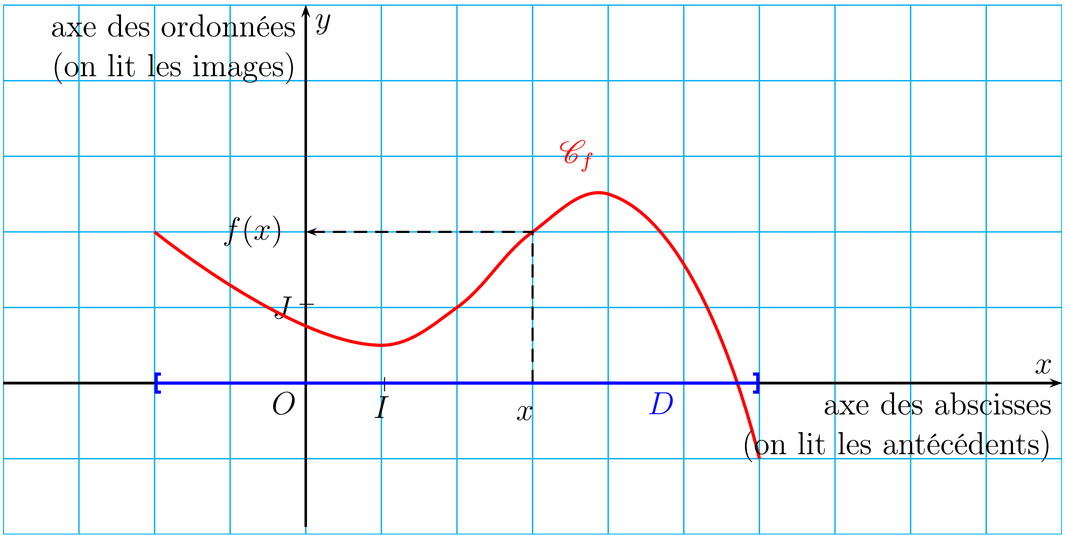
Exemple :
Posons $f(x) = -2x^2 + 3$.
L'image de 5 par f est $f(5) = -2 \times 5^2 + 3 = -50 + 3 = -47$.

Définition
Soit f une fonction définie sur D. Soit y un nombre réel.
On appelle antécédent de y par f tout nombre x de D tel que $f(x) = y$.

Remarque
Un nombre y peut avoir 0 antécédent, ou un antécédent, ou plusieurs !
Par contre, tout nombre x de D admet une unique image $f(x)$.

I.1 Représentation graphique d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D$.
Autrement dit, $M(x; y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\big(x \in D$ et $y = f(x)\big)$.
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.



Remarque
L'ensemble de définition d'une fonction se lit sur l'axe des abscisses.
Sur cet exemple, l'ensemble de définition de f est $D = [-2; 6]$.

II Les fonctions affines

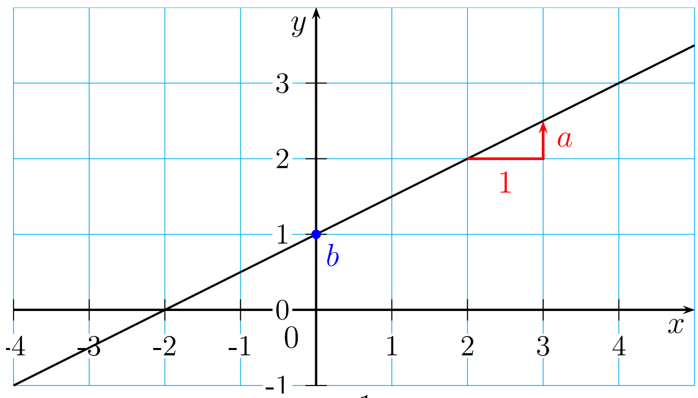
Définition
Une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x réel $f(x) = ax + b$.
On peut toujours définir une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction f donnée par $f(x) = 2x + 3$.

Théorème
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Vocabulaire :
Soit f définie par $f(x) = ax + b$.

- Le réel a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f.
  « quand on avance de 1, on "monte" de a ».
- le réel b est l'ordonnée à l'origine. :
  La droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$.



$f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$

Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :
Comme c'est une droite, il suffit de construire deux points.
- On choisit deux valeurs de x, (qui donnent des calculs simples si possible)
- on calcule les images correspondantes,
- on place les points obtenus, et on trace la droite les reliant.

Exercice 1
Tracer la courbe de la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$.

x	0	5
y	...	...

Remarque
Cas particuliers :
- Lorsque $a = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$.
  La fonction est dite constante. La courbe de f est alors une droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Lorsque $b = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
  La fonction est dite linéaire. La courbe de f est une droite passant par O.

III La fonction carré

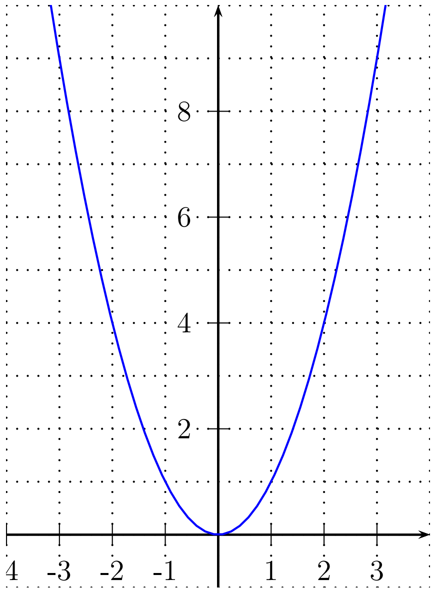
Définition
La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 2
Considérons la fonction carré défnie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
1. Déterminer les antécédents de 9 par f.
   Un antécédent de 9 est un nombre x tel que $f(x) = 9$.
   L'équation $x^2 = 9$ donne $x = 3$ ou $x = -3$.
   Ainsi, le nombre 9 a deux antécédents qui sont 3 et -3.
2. Rechercher les antécédents de -2 par f.
   Ce sont les nombres x tels que $x^2 = -2$.
   Cette équation n'a pas de solution (un carré est toujours positif).
   Donc -2 n'a pas d'antécédent par f.

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3
x^2									

Théorème (Représentation graphique)
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une parabole de sommet O.
L'axe des ordonnées (Oy) est axe de symétrie de la courbe (fonction paire).



Remarque

- La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se traduit par :
  pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.
  Autrement dit, deux opposés ont le même carré.

- L'ensemble des valeurs prises par la fonction carré est $[0; +\infty[$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ (un carré est toujours positif).

Exercice 3
Donner les antécédents par la fonction carré de 4, de 0, de -3, de 1 et de 5.

Exercice 4
À l'aide d'un contre-exemple, montrer que les assertions suivantes sont fausses.

1. Si x^2 est positif, alors x est positif.
2. Si $x^2 = 16$, alors $x = 4$.
3. Si $x^2 > 4$, alors $x > 2$.
4. Si $x < 3$, alors $x^2 < 9$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 est plus grand que x.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x + 5)^2 = x^2 + 25$.
7. Si $x \neq y$, alors $x^2 \neq y^2$.
8. Si $x < y$, alors $x^2 < y^2$.
9. Si $x \in [-2; 3]$, alors $x^2 \in [4; 9]$.

Propriété (identités remarquables)
Pour tous nombres réels a et b,

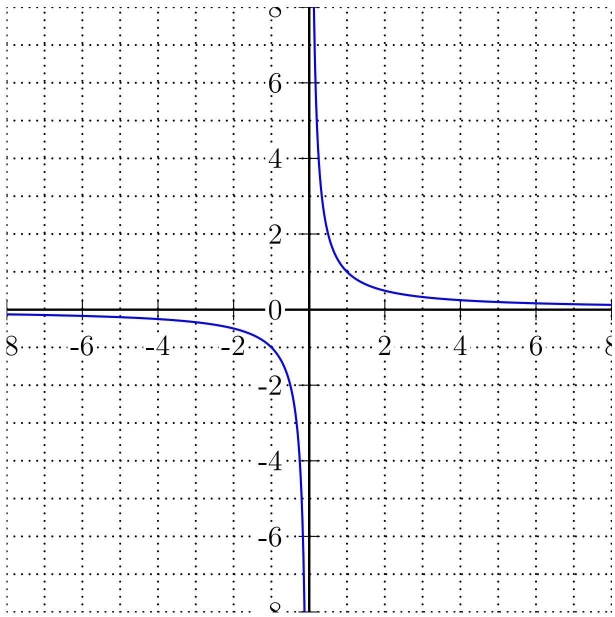
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Exercice 5
Démontrer cette propriété en développant.

IV La fonction inverse

Définition
La fonction inverse est définie pour tout x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est donc $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$

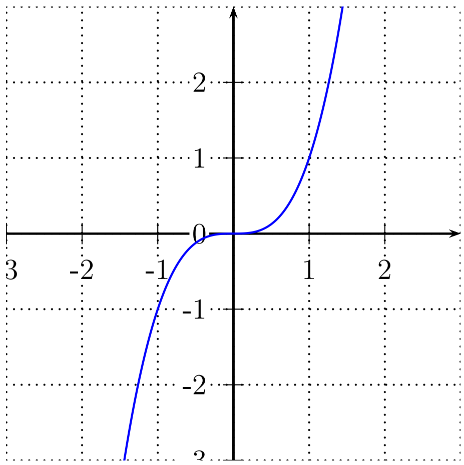


Remarque
La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.
L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe : pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = -f(x)$ (c'est une fonction impaire).
Le signe de $\dfrac{1}{x}$ est le même que le signe de x : $x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 0$, et $x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 0$.

V La fonction cube

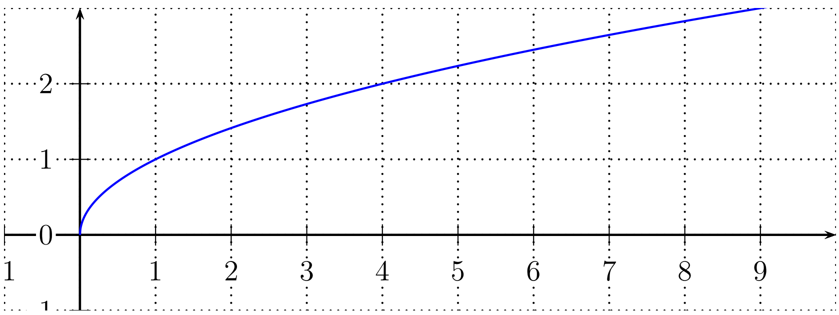
Définition
La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Remarque
La courbe est symétrique par rapport au point O : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ (la fonction cube est impaire).



VI La fonction racine carrée

Définition
La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.



Propriété
Pour tous nombres a et b positifs ou nuls,

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Remarque
Attention, de façon générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, prenons $a = 9$ et $b = 16$.
$\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$, tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3 + 4 = 7$.

VII Compléments

VII.1 Fonctions paires et fonctions impaires

VII.1.a Fonctions paires

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

VII.1.b Fonctions impaires

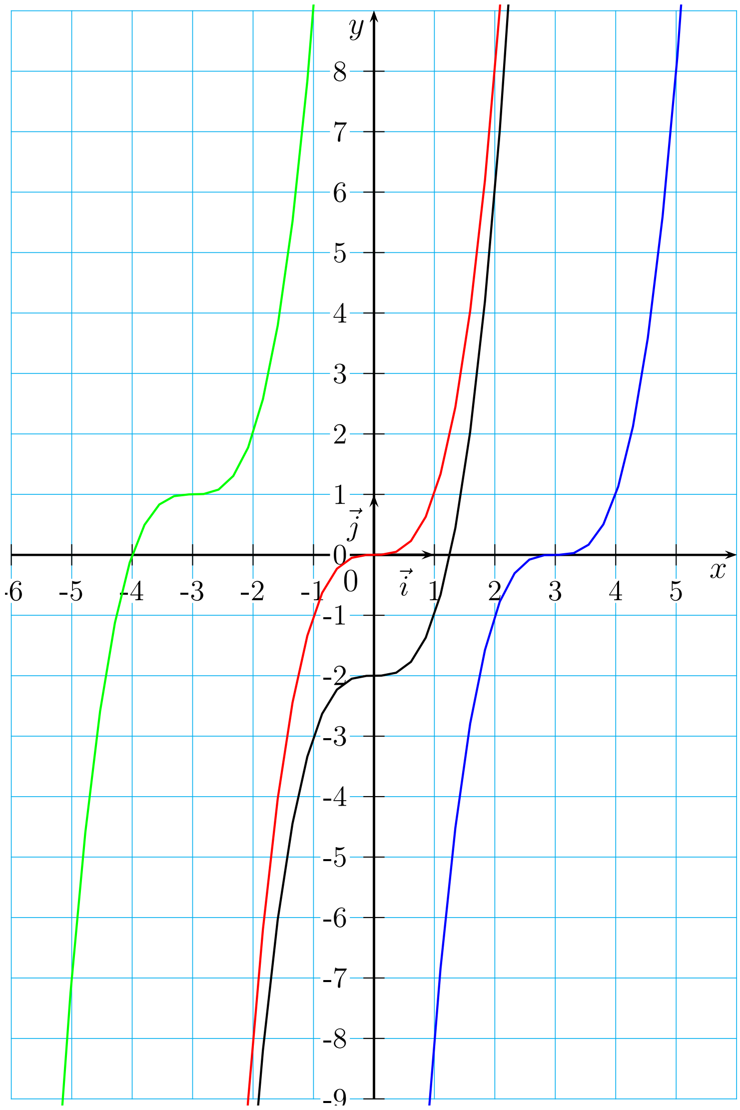
Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est impaire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère (le point O).

Remarque

1. Les fonctions du type x^2, x^4, x^n avec n entier pair sont des fonctions paires.
2. Les fonctions du type x^3, x^5, x^n avec n impair sont des fonctions impaires.
3. Il n'y a qu'une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire, c'est la fonction nulle (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$).

VII.2 Fonctions associées

Exemple :
$f(x) = x^3$,
$g(x) = x^3 - 2$,
$h(x) = (x-3)^3$,
$i(x) = (x+3)^3 + 1$.



Théorème
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Si g est définie par $g(x) = f(x-a)$, alors $\mathcal{C}_g$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i}$.
2. Si h est définie par $h(x) = f(x) + b$, alors $\mathcal{C}_h$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $b\vec{j}$.
3. Si u est définie par $u(x) = f(x-a) + b$, alors $\mathcal{C}_u$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.
4. Si v est définie par $v(x) = -f(x)$, alors $\mathcal{C}_v$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie d'axe $(O;\vec{i})$.