

Chapitre 4 : Dérivation

Première partie

Un peu d'histoire

L'histoire du calcul infinitésimal remonte à l'Antiquité. Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens : Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz.

Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Archimède, Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment.

C'est à Lagrange (fin du XVIII^e siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x . C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

I Nombre dérivé

Définition (taux d'accroissement)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I , et $a \in I$.

Soit h un réel non nul, tel que $a + h \in I$.

le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

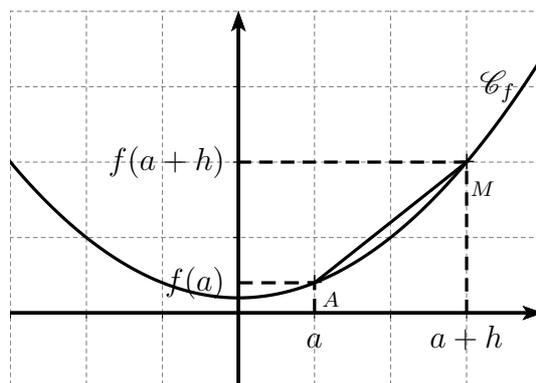
Remarque

Notons A et M les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et $a + h$.

On a donc $A(a; f(a))$ et $M(a + h; f(a + h))$.

Le taux d'accroissement $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM) .

En effet, $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.



Exercice 1

Posons $f(x) = x^2$, et $a = 1$. Soit $h \neq 0$.

Exprimer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$.

Remarque

Le taux d'accroissement n'est pas défini lorsque $h = 0$, mais on s'intéresse à ce qu'il devient lorsque h tend vers 0.

Définition (nombre dérivé)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.

Ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exercice 2

On reprend $f(x) = x^2$, et $a = 1$.

Montrer que f est dérivable en $a = 1$.

Soit $h \neq 0$.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h.$$

Il vient donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$.

Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

Définition (tangente)

Soit f une fonction dérivable en le réel a .

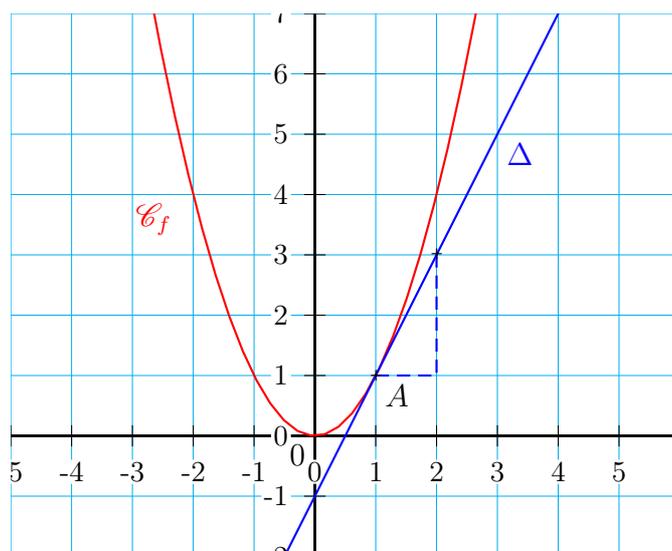
La tangente à la courbe de f en a est la droite qui passe par le point de coordonnées $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple :

On pose $f(x) = x^2$, et $a = 1$.

On a vu que $f'(1) = 2$.

Donc la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.

**Remarque**

Pour tracer la tangente au point d'abscisse a , il suffit de placer le point $A(a; f(a))$ et d'exploiter le coefficient directeur $f'(a)$ pour obtenir un second point.

Exercice 3

Soit f la fonction carré.

1. Montrer que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$.
2. Tracer la tangente T_{-2} à la courbe de f au point d'abscisse -2 sur le graphique précédent.

Propriété (équation de tangente)

Soit f une fonction dérivable en un réel a .

Une équation de la tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque

1. Le nombre dérivé $f'(a)$ s'interprète graphiquement comme étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisses a .
2. Dans l'équation précédente, on vérifie facilement que le point de coordonnées $(a; f(a))$ appartient à la droite, et que le coefficient directeur est $f'(a)$.

Exemple :

On reprend la fonction carré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$, et $a = 1$.

Cherchons une équation de la tangente T_1 à la courbe f au point d'abscisse 1.

C'est la droite qui passe par le point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; 1)$, et de coefficient directeur $f'(1) = 2$.

On applique la formule précédente :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1.$$

La tangente à \mathcal{C}_f en 1 est la droite T_1 d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 4

Déterminer une équation de la tangente T_{-2} à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse -2 .

On rappelle que $f'(-2) = -4$ (voir exercice 3).¹

Remarque

- On retiendra que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .
- Cas particulier important.

Soit f une fonction dérivable en un réel a .

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses ssi $f'(a) = 0$.

1. On obtient que T_{-2} a pour équation réduite $y = -4x - 4$.

II Fonction dérivée

Exercice 5

Montrer que pour tout nombre réel a , la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a . Calculer $f'(a)$.

Soient $a \in \mathbb{R}$, et $h \neq 0$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a + h.$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a.$$

Ainsi, f est dérivable en tout réel a , et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 2a$.

Définition

Soit f un fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I , c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe.

Alors la fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple :

Ainsi, d'après l'exercice 5, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$.

On retrouve ainsi directement $f'(1) = 2$ et $f'(-2) = -4$.

II.1 Dérivée des fonctions usuelles

Théorème (à connaître par ♥)

| Fonction f | Dérivée f' | Intervalle de validité |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = c$ (fonction constante) $f(x) = x$ $f(x) = ax + b$ | $f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = a$ | $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^n, n \geq 1$ | $f'(x) = 2x$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(x) = nx^{n-1}$ | $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n, n \leq -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ | $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ $I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $I =]0; +\infty[$ |

Exemples :

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^5$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4$.

Si pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$, alors pour tout $x \neq 0$ $g'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 11$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4$.

Démonstration

1. Fonctions constantes. C'est évident puisque le nombre dérivé décrit la pente de la tangente.
2. Fonctions affines. Même argument.
3. $x \mapsto x^n$ On admet la démonstration.
4. $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Soit a un nombre réel non nul, et $h \neq 0$ tel que $a + h \neq 0$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

Il apparaît donc que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$

Donc f est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas 0 et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

5. Fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit $a \geq 0$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \geq 0$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \quad (\text{quantité conjuguée})$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

Ainsi, pour $a > 0$,

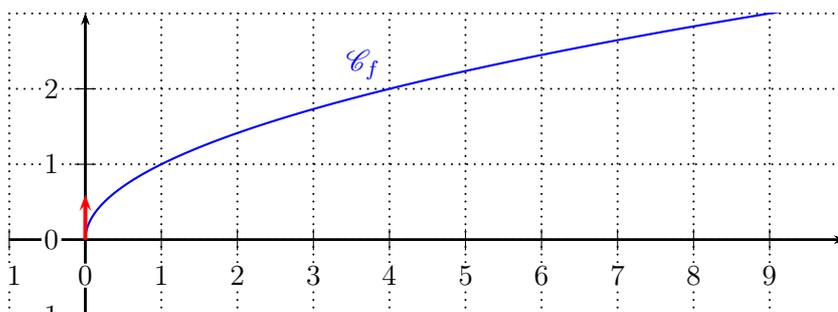
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

En revanche, pour $a = 0$, on a $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, et ce taux d'accroissement admet pour limite $+\infty$ (non réel) lorsque h tend vers 0.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Remarque : cela se traduit sur la courbe par une tangente parallèle à l'axe des ordonnées en 0 (on dit parfois "tangente verticale").



II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I , soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.

La fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

2. Produit par un nombre réel.

Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.

3. Produit de fonctions.

La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

4. Inverse et quotient.

Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I, v(x) \neq 0$), alors

— la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

— la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exercice 6

Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 5x^4$

2. $g(x) = x + \frac{1}{x}$

3. $h(x) = x\sqrt{x}$

4. $i(x) = \frac{1}{3x^2}$

5. $j(x) = \frac{3-x}{6x+1}$

Remarque

Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .

Toute fonction fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration

1. $(u + v)' = u' + v'$

$$\frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = \frac{u(a + h) - u(a)}{h} + \frac{v(a + h) - v(a)}{h}.$$

$$\text{Donc } (u + v)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a).$$

2. $(k \times u)' = k \times u'$

$$\frac{(k \times u)(a + h) - (k \times u)(a)}{h} = \frac{k \times u(a + h) - k \times u(a)}{h} = k \times \frac{u(a + h) - u(a)}{h}.$$

$$\text{Donc } (k \times u)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(k \times u)(a + h) - (k \times u)(a)}{h} = k \times u'(a).$$

3. $(u \times v)' = u'v + uv'$

$$\frac{(uv)(a + h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a + h)v(a + h) - u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + u(a) \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$

On admet le résultat suivant, vu en terminale : toute fonction dérivable en a est continue en a .

On a alors $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$.

Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

D'où la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

$$4. \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a+h)v(a)}.$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0,

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -v'(a) \times \frac{1}{[v(a)]^2} = -\frac{v'}{v^2}(a).$$

$$5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

idée : $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ et utiliser la formule qui permet de dériver un produit.

Propriété (admise)

Soient a et b deux réels, et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J .

Soit I un intervalle tel que pour tout $x \in I$, $ax + b \in J$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = g(ax + b)$.

Alors, la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.

Exercice 7

À l'aide de la propriété, dériver les fonctions suivantes :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1 - 5x)^2$.
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (7x + 4)^3$.
3. Soit f la fonction définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 10}$.
4. Soit f la fonction définie sur $] - \infty; 3[$ par $f(x) = \sqrt{-4x + 12}$.

II.3 Étude de la fonction valeur absolue

Définition

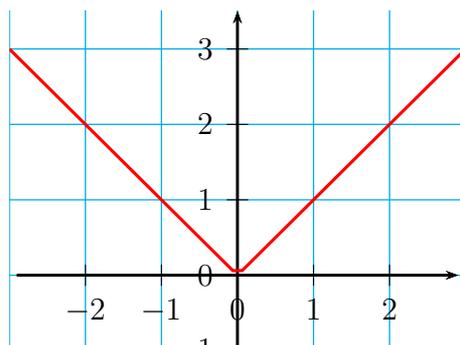
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est définie sur \mathbb{R} par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exemple :

$|-4| = 4$, $|11| = 11$, et $|\pi - 7| = -(\pi - 7) = 7 - \pi$ car $\pi - 7 < 0$.

Remarque

La fonction valeur absolue est affine par morceaux et sa courbe représentative est la réunion de deux demi-droites d'origine O .



Propriété

Soit f la fonction valeur absolue.

f est dérivable en tout réel x non nul.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$, pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration

On montre la non dérivabilité en 0.

Soit $h \neq 0$. $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$.

Ainsi, avec $h > 0$, $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$.

Donc $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$.

En revanche, avec $h < 0$, $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$.

Donc $\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$.

On observe que, selon que h est positif ou négatif, le taux d'accroissement a deux limites différentes lorsque h tend vers 0.

Dans ce cas, le taux d'accroissement n'a pas de limite lorsque h tend vers 0, et f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 8

Soit f la fonction inverse définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$

1. Soit $a \neq 0$. Exprimer en fonction de a l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a .
2. Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe de f qui passent par le point $K(-8; 1)$, et donner une équation de chacune.