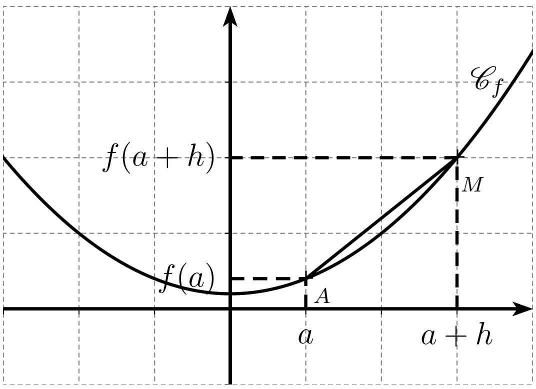
Chapitre 4 : Dérivation
Première partie

Un peu d'histoire
L'histoire du calcul infinitésimal remonte à l'Antiquité. Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens : Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz.
Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Archimède, Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment.
C'est à Lagrange (fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

I Nombre dérivé

Définition (taux d'accroissement)
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$.
Soit h un réel non nul, tel que $a + h \in I$.
le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque
Notons A et M les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et $a + h$.
On a donc $A(a; f(a))$ et $M(a + h; f(a + h))$.
Le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AM).
En effet, $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.



Exercice 1
Posons $f(x) = x^2$, et $a = 1$. Soit $h \neq 0$.
Exprimer le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$.

Remarque
Le taux d'accroissement n'est pas défini lorsque $h = 0$, mais on s'intéresse à ce qu'il devient lorsque h tend vers 0.

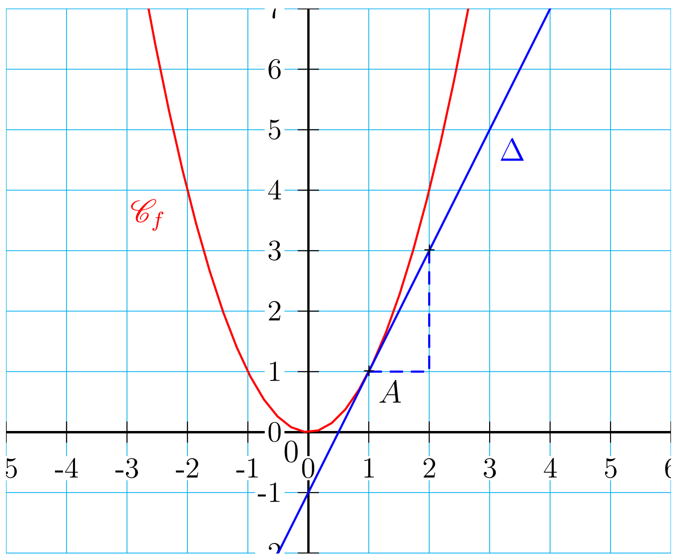
Définition (nombre dérivé)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.
Ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exercice 2
On reprend $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
Montrer que f est dérivable en $a = 1$.
Soit $h \neq 0$.
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{(1+h)^2-1^2}{h} = \dfrac{1+2h+h^2-1}{h} = \dfrac{2h+h^2}{h} = \dfrac{h(2+h)}{h} = 2+h.$
Il vient donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2.$
Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

Définition (tangente)
Soit f une fonction dérivable en le réel a.
La tangente à la courbe de f en a est la droite qui passe par le point de coordonnées $A\,(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple :
On pose $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
On a vu que $f'(1) = 2$.
Donc la tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.



Remarque
Pour tracer la tangente au point d'abscisse a, il suffit de placer le point $A(a; f(a))$ et d'exploiter le coefficient directeur $f'(a)$ pour obtenir un second point.

Exercice 3
Soit f la fonction carré.

1. Montrer que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$.
2. Tracer la tangente T_{-2} à la courbe de f au point d'abscisse -2 sur le graphique précédent.

Propriété (équation de tangente)
Soit f une fonction dérivable en un réel a.
Une équation de la tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Remarque

1. Le nombre dérivé $f'(a)$ s'interprète graphiquement comme étant le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisses a.
2. Dans l'équation précédente, on vérifie facilement que le point de coordonnées $(a; f(a))$ appartient à la droite, et que le coefficient directeur est $f'(a)$.

Exemple :
On reprend la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$, et $a = 1$.
Cherchons une équation de la tangente T_1 à la courbe f au point d'abscisse 1.
C'est la droite qui passe par le point $A(1; f(1))$, c'est-à-dire $A(1; 1)$, et de coefficient directeur $f'(1) = 2$.
On applique la formule précédente :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1.$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est la droite T_1 d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 4
Déterminer une équation de la tangente T_{-2} à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse -2.
On rappelle que $f'(-2) = -4$ (voir exercice 3).[1]

Remarque

— On retiendra que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

— Cas particulier important.
Soit f une fonction dérivable en un réel a.
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses ssi $f'(a) = 0$.

1. On obtient que T_{-2} a pour équation réduite $y = -4x - 4$.

II Fonction dérivée

Exercice 5
Montrer que pour tout nombre réel a, la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a. Calculer $f'(a)$.
Soient $a \in \mathbb{R}$, et $h \neq 0$.
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h}$
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a+h.$
Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a.$
Ainsi, f est dérivable en tout réel a, et pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 2a$.

Définition
Soit f un fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe.
Alors la fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exemple :
Ainsi, d'après l'exercice 5, la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 2x$.
On retrouve ainsi directement $f'(1) = 2$ et $f'(-2) = -4$.

II.1 Dérivée des fonctions usuelles

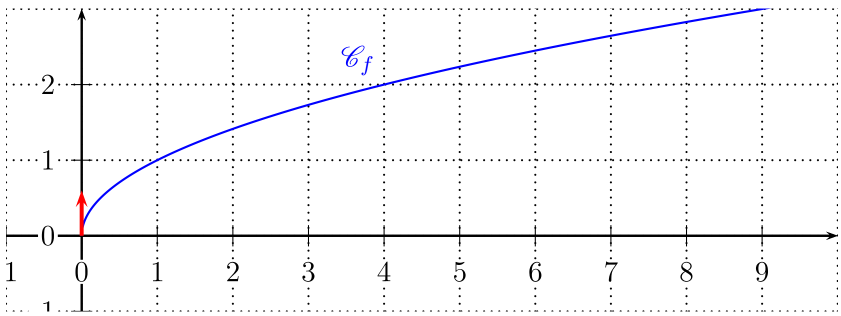
Théorème (à connaître par ♡)

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (fonction constante) $f(x) = x$ $f(x) = ax+b$	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 1$ $f'(x) = a$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$ $f(x) = x^3$ $f(x) = x^n$, $n \geqslant 1$	$f'(x) = 2x$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$ $I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \leqslant -1$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = nx^{n-1}$ $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$I =]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ $I =]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I =]0;+\infty[$

Exemples :
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^5$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4$.
Si pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, alors pour tout $x \neq 0$ $g'(x) = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.
Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 11$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4$.

Démonstration

1. Fonctions constantes. C'est évident puisque le nombre dérivé décrit la pente de la tangente.
2. Fonctions affines. Même argument.
3. $x \mapsto x^n$ On admet la démonstration.
4. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   Soit a un nombre réel non nul, et $h \neq 0$ tel que $a + h \neq 0$.
   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{-h}{a(a+h)} \times \dfrac{1}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$.
   Il apparaît donc que
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$
   Donc f est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas 0 et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
5. Fonction racine carrée, $f(x) = \sqrt{x}$.
   Soit $a \geqslant 0$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \geqslant 0$.
   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \dfrac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$ (quantité conjuguée)
   $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.
   Ainsi, pour $a > 0$,
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$
   Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   En revanche, pour $a = 0$, on a $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, et ce taux d'accroissement admet pour limite $+\infty$ (non réel) lorsque h tend vers 0.
   Donc f n'est pas dérivable en 0.
   Remarque : cela se traduit sur la courbe par une tangente parallèle à l'axe des ordonnées en 0 (on dit parfois "tangente verticale").



□

II.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I,\ v(x) \neq 0$), alors
   — la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$
   — la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exercice 6
Dériver les fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x - 5x^4$
2. $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$
3. $h(x) = x\sqrt{x}$
4. $i(x) = \dfrac{1}{3x^2}$
5. $j(x) = \dfrac{3-x}{6x+1}$

Remarque
Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Démonstration

1. $(u+v)' = u' + v'$
   $$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$
   Donc $(u+v)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$.
2. $(k \times u)' = k \times u'$
   $$\frac{(k \times u)(a+h) - (k \times u)(a)}{h} = \frac{k \times u(a+h) - k \times u(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$
   Donc $(k \times u)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(k \times u)(a+h) - (k \times u)(a)}{h} = k \times u'(a)$.
3. $(u \times v)' = u'v + uv'$
   $$\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$$

$= \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
On admet le résultats suivant, vu en terminale : toute fonction dérivable en a est continue en a.
On a alors $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.
Ainsi,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$$

D'où la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

4. $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
   $\dfrac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h} = -\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\dfrac{1}{v(a+h)v(a)}$.
   En passant à la limite lorsque h tend vers 0,
   $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -v'(a)\times\dfrac{1}{[v(a)]^2} = -\dfrac{v'}{v^2}(a)$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
   idée : $\dfrac{u}{v} = u\times\dfrac{1}{v}$ et utiliser la formule qui permet de dériver un produit. □

Propriété (admise)
Soient a et b deux réels, et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J.
Soit I un intervalle tel que pour tout $x\in I$, $ax+b\in J$.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = g(ax+b)$.
Alors, la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x\in I$, $f'(x) = a\times g'(ax+b)$.

Exercice 7
À l'aide de la propriété, dériver les fonctions suivantes :

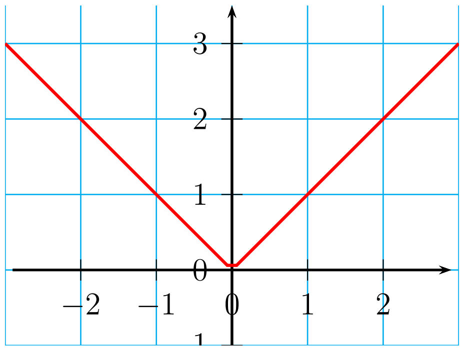
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-5x)^2$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (7x+4)^3$.
3. Soit f la fonction définie sur $]5;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x-10}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[$ par $f(x) = \sqrt{-4x+12}$.

II.3 Étude de la fonction valeur absolue

Définition
La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Exemple :
$|-4| = 4$, $|11| = 11$, et $|\pi - 7| = -(\pi - 7) = 7 - \pi$ car $\pi - 7 < 0$.

Remarque
La fonction valeur absolue est affine par morceaux et sa courbe représentative est la réunion de deux demi-droites d'origine O.



Propriété
Soit f la fonction valeur absolue.
f est dérivable en tout réel x non nul.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$, pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.
La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration
On montre la non dérivabilité en 0.
Soit $h \neq 0$. $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.
Ainsi, avec $h > 0$, $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$.
Donc $\displaystyle\lim_{h \to 0, h > 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$.
En revanche, avec $h < 0$, $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$.
Donc $\displaystyle\lim_{h \to 0, h < 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$.
On observe que, selon que h est positif ou négatif, le taux d'accroissement a deux limites différentes lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, le taux d'accroissement n'a pas de limite lorsque h tend vers 0, et f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 8
Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Soit $a \neq 0$. Exprimer en fonction de a l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
2. Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe de f qui passent par le point $K(-8; 1)$, et donner une équation de chacune.