T7S-T8S Mardi 19 décembre 2017

Contrôle commun n° 2

Exercice 1 (5 points + 1 bonus)

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;

— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Calculer la probabilité que l'ampoule provienne de la machine A et ne présente pas de défaut.
   (c) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
   (d) L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève des ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
   (a) Pour cette question seulement, on prélève 10 ampoules.
      i. Calculer la probabilité que 2 ampoules présentent un défaut.
      ii. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 4 ampoules présentant un défaut.
   (b) **Question bonus :** Déterminer le nombre minimal d'ampoules à prélever pour que la probabilité d'obtenir au moins une ampoule ayant un défaut soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2 (2,5 points)

1. Dans chacun des cas suivants, préciser sur quel intervalle la fonction est définie, sur quel intervalle elle est dérivable puis calculer sa fonction dérivée :
   a) $f(x) = (4x+3)^6$ b) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$.
   Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 2$.

Exercice 3 (9,5 points)
Soit f la fonction définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
   (a) Étudier la limite de g en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (d) Étudier le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Étudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) Montrer que pour tout x de $[0;1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
   (c) En déduire les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variation.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x+2$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

Exercice 4 (3 points + 1 bonus)
$ABCDEFGH$ est un pavé droit et I le centre du rectangle $EFGH$.

1. Déterminer l'intersection des plans CFH et ACG.
2. Justifier que les droites (CI) et (AE) sont sécantes en un point J.
3. **Question bonus :** Montrer que E est le milieu de $[AJ]$.