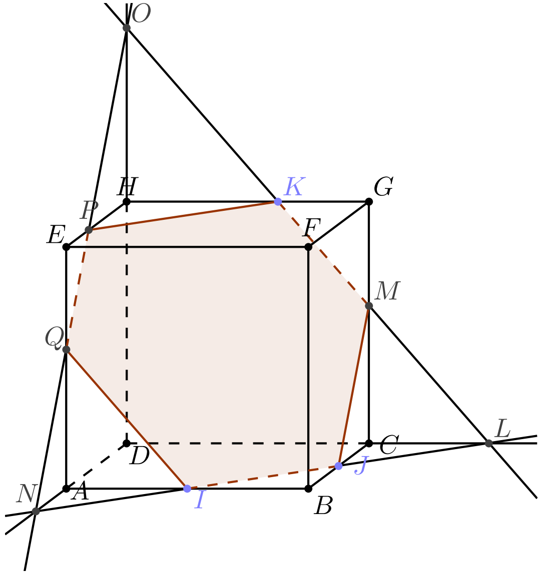
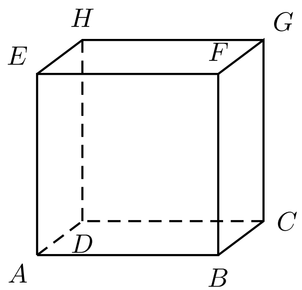
Interrogation n° 3
Correction du sujet 1

Exercice 1
Construire l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces du cube.



(IJ) coupe (CD) en L et (AD) en N.
(LK) coupe (CG) en M et (DH) en O.
(NO) coupe (AE) en Q et (EH) en P.
La section du cube est l'hexagone $IJMKPQ$.

Exercice 2
Soit $ABCDEFGH$ un cube.



1. Montrer que $(EF) \perp (BG)$.
   Par définition du cube, où les faces sont des carrés, on a $(EF) \perp (BF)$, et $(EF) \perp (FG)$.
   Comme la droite (EF) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (BFG), elle est perpendiculaire à ce plan.
   $\boxed{(EF) \perp (BFG).}$
   Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
   $\boxed{\text{En particulier, } (EF) \perp (BG).}$
2. En déduire que $(EC) \perp (BG)$.
   Il est clair que $(FC) \perp (BG)$ (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires).
   $\left.\begin{array}{l}(BG) \perp (EF)\\(BG) \perp (FC)\end{array}\right\}$, donc $(BG) \perp (EFC)$.
   $\boxed{\text{En particulier, } (BG) \perp (EC).}$
   Remarque : on pouvait aussi démontrer les questions 1 et 2 en justifiant que (EFC) est le plan médiateur du segment $[BG]$ (E, F, et C sont équidistants de B et de G).
3. Prouver que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (BDG).
   Indication : on pourra étudier la position de (BD) par rapport au plan (EAC).

   — Montrons que $(BD) \perp (EAC)$.
   On a clairement $AB = AD$, et $CB = CD$ (arêtes du cube).
   De plus, $EB = ED$ (diagonales d'une face du cube).
   Les points A, C et E sont équidistants de B et de D.
   Ils appartiennent au plan médiateur du segment $[BD]$.
   Comme A, E, et C ne sont pas alignés, le plan médiateur du segment $[BD]$ est la plan (EAC).
   Le plan médiateur d'un segment est le plan orthogonal au segment et qui le coupe en son milieu.
   $\boxed{\text{Donc } (BD) \perp (EAC).}$
   — Montrons que $(EC) \perp (BDG)$.
   D'après le point précédent, $(BD) \perp (EAC)$, et donc $(BD) \perp (EC)$.
   $\left.\begin{array}{ll}(BD) \perp (EC) & \\(BG) \perp (EC) & \text{(question 2)}\end{array}\right\}$, donc $\boxed{(EC) \perp (BDG).}$

Exercice 3 (Réponses rédigées sans détails)
La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{3x-5}{x+1}$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes.
   Pour tout $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{3-\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
   $\boxed{\text{La droite d'équation } y = 3 \text{ est asymptote à la courbe de } f \text{ au voisinage de } +\infty \text{ et de } -\infty.}$
   $\lim\limits_{x\to-1} 3x-5 = -8 < 0$, et $\lim\limits_{x\to-1^-} x+1 = 0-$.
   Par quotient, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.
   $\boxed{\text{Donc la droite d'équation } x = -1 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f.}$

2. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.
On étudie le signe de $f(x)-3$.
$f(x)-3=\dfrac{3x-5}{x+1}=\dfrac{3x-5-3(x+1)}{x+1}=\dfrac{-8}{x+1}$.

x	∞		-1		$+\infty$
$f(x)-3$		$+$	$\Vert$	$-$	

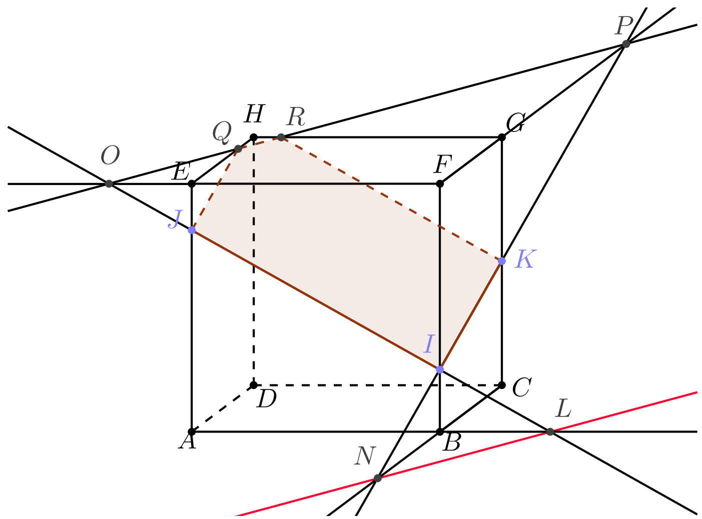
$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sur }]-\infty;-1[\text{, la courbe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote horizontale.}\\ \text{Sur }]-1;+\infty[\text{, la courbe de } f \text{ est en-dessus de son asymptote horizontale.}\end{array}}$

3. Déterminer le tableau de variation complet de f.
Comme toute fonction fraction rationnelle, f est dérivable sur son ensemble de définition.
Pour tout $x\neq -1$, $f'(x)=\dfrac{3(x+1)-(3x-5)}{(x+1)^2}=\dfrac{8}{(x+1)^2}>0$.

x	∞		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	3

Sujet 2

Exercice 4
Construire l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces du cube.



(IJ) coupe (AB) en L et (EF) en O.
(IK) coupe (BC) en N et (FG) en P.
(OP) coupe (EH) en Q et (HG) en R.
La section du cube est le pentagone $(IKRQJ)$.
L'intersection du plan (IJK) avec la face $(ABCD)$ est la droite (NL) (à l'extérieur du cube).

Exercice 5 (voir sujet 1)
C'est le même exercice que le sujet 1 en changeant le nom de certains sommets du cube.

Exercice 6 (sans justifications)
La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{-3x+4}{x-2}$ sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$.
$\boxed{\text{La droite d'équation } y=-3 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de } f \text{ en } -\infty \text{ et en } +\infty.}$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$.
$\boxed{\text{La droite d'équation } x=2 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f.}$

2. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.
$f(x)-(-3)=f(x)+3=\dfrac{-2}{x-2}$, qui est de signe contraire à $(x-2)$.
$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sur }]-\infty;2[\text{, la courbe de } f \text{ est située au-dessus de son asymptote horizontale.}\\ \text{Sur }]2;+\infty[\text{la courbe de } f \text{ est située en-dessous de son asymptote horizontale.}\end{array}}$

3. Déterminer le tableau de variation complet de f.
pour tout $x\neq 2$, $f'(x)=\dfrac{-3(x-2)-(-3x+4)}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{(x-2)^2}>0$.

x	∞		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3