Seconde. Interrogation de mathématiques n° 7
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (questions de cours, 3 points)

1. Donner la formule de la moyenne d'une série statistique dont les valeurs sont $x_1, \dots x_p$, les effectifs respectifs $n_1, \dots, n_p$, et N est l'effectif total.
$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$
2. Donner la définition du troisième quartile Q_3 d'une série statistique.
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 75 % des valeurs soient inférieures ou égales à Q_3.

Exercice 2 (4 points)
On donne les performances de deux coureuses au 400 m haies.

Temps de parcours (en s)	57	59	61	63	65	67
Catherine (nombre de courses)	4	12	11	15	9	9
Elise (nombre de courses)	1	11	12	19	9	8

1. Déterminer le temps de parcours moyen de Catherine. Justifier.
Pour Catherine, $N = 4 + 12 + 11 + 15 + 9 + 9 = 60$.
$\overline{x_C} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$
$\overline{x_C} = \dfrac{57 \times 4 + \cdots + 67 \times 9}{60} \approx 62,33$.
2. À l'aide de la calculatrice, donner sans justification l'écart-type de Catherine, et la moyenne et l'écart-type d'Élise.
L'écart-type pour Catherine est $\sigma_C \approx 2,98$.
Pour Élise, $\overline{x_E} = 62,6$, et $\sigma_E \approx 2,63$.
3. Quelle est la coureuse la plus rapide ? la plus régulière ?
Comme $\overline{x_C} < \overline{x_E}$, Catherine est la plus rapide en moyenne (son temps est inférieur).
Comme $\sigma_E < \sigma_C$, Élise est la plus régulière (un écart-type petit indique peu de dispersion).

Exercice 3 (5 points)
Un soir de retour de week-end, le temps d'attente de 50 véhicules a été relevé au péage.

Temps d'attente (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de véhicules	6	11	8	7	5	4	3	3	2	1
ECC	6	17	25	32	37	41	44	47	49	50

1. Compléter les effectifs cumulés croissantes (ECC).
2. Déterminer la médiane de la série, et interpréter le résultat.
$N = 50$, pair, $N = 2 \times 25$.
La médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales, qui sont la 25e et la 26e.
$Me = \dfrac{3+4}{2} = 3,5$.
Au moins la moitié des usagers attendent 3,5 minutes ou moins.
Et au moins la moitié des usagers attendent 3,5 minutes ou plus.
3. Déterminer les quartiles Q_1 et Q_3. Interpréter ces résultats.
$\dfrac{N}{4} = \dfrac{50}{4} = 12,5$.
Q_1 est la 13e valeur, donc $Q_1 = 2$.
Au moins 25% des usagers attentent 2 minutes ou moins.
$\dfrac{3N}{4} = \dfrac{3 \times 50}{4} = 37,5$.
Q_3 est la 38e valeur, Donc $Q_3 = 6$.
Au moins 75% des usagers attentent 6 minutes ou moins.
4. Le responsable du péage en charge de la gestion du traffic considère qu'il faut ouvrir de nouveaux postes si au moins

40 % des usagers attendent 6 minutes ou plus.
Doit-il ouvrir de nouveaux postes de péage ?
On détermine une proportion ou fréquence par la formule $\text{frequence} = \dfrac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$.

$f = \dfrac{4+3+3+2+1}{50} = \dfrac{13}{50} = 0,26$.

26% des usagers attendent 6 minutes ou plus.
$0,26 < 0,4$. Il n'y a pas lieu d'ouvrir de nouveau poste de péage.

Exercice 4 (5 points)

On donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (3x-5)^2 - (x-3)(3x-5)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - 16x + 10$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-5)^2 - (x-3)(3x-5) \\ &= (3x)^2 - 2\times 3x\times 5 + 5^2 - (3x^2 - 5x - 9x + 15) \\ &= 9x^2 - 30x + 25 - 3x^2 + 14x - 15 \\ &= 6x^2 - 16x + 10 \end{aligned}$$

2. Montrer que $f(x) = (3x-5)(2x-2)$.
En développant, $(3x-5)(2x-2) = 6x^2 - 6x - 10x + 10 = 6x^2 - 16x + 10 = f(x)$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (3x-5)(2x-2)$.

3. En choisissant la forme adaptée, résoudre les équations :
   (a) $f(x) = 0$.
   Avec la forme factorisée,
   $(3x-5)(2x-2) = 0$ ssi $(3x-5 = 0$ ou $2x-2 = 0)$ ssi $(x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = 1)$.
   Les solutions sont $\dfrac{5}{3}$ et 1.
   (b) $f(x) = 10$.
   Avec la forme développée,
   $6x^2 - 16x + 10 = 10$ ssi $6x^2 - 16x = 0$ ssi $x(6x-16) = 0$ ssi $(x = 0$ ou $6x - 16 = 0)$ ssi $(x = 0$ ou $x = \dfrac{8}{3})$.
   Les solutions sont 0 et $\dfrac{8}{3}$.

Exercice 5 (2 points)

Compléter sur l'énoncé. Aucune justification n'est demandée.

Instruction Python	Valeurs prises par `k`	Nombre de tours
`for k in range(1,8)`	1 ; . . . ; 7	7
`for k in range(4,38)`	4 ;5 ;6 ;. . . ; 37	34

Exercice 6 (2 points)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S(n) = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

1. Calculer sous forme de fraction irréductible :
$S(2) = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2}$, et $S(3) = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2}$.
$S(2) = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4+1}{4} = \dfrac{5}{4}$.
$S(3) = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5\times 9 + 4}{36} = \dfrac{49}{36}$.
2. Compléter la fonction Python d'argument n (entier non nul) qui renvoie $S(n)$.

```
def Somme(n) :
  S=0
  for k in range(1,n+1) :
    S=S+1/k**2
  return(S)
```

Exercice 7 (bonus, 1 point)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $49x^3 = x$.

$$\begin{aligned} 49x^3 &= x \\ 49x^3 - x &= 0 \\ x(49x^2 - 1) &= 0 \\ x(7x-1)(7x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ ou } 7x - 1 = 0 \text{ ou } 7x + 1 = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{7} \text{ ou } x = -\frac{1}{7}.$$

Les solutions sont 0, $\dfrac{1}{7}$, et $-\dfrac{1}{7}$.