Chapitre 11 : Fonctions de référence
Fonction carré, fonction inverse

I La fonction carré

Définition
La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Exercice 1

1. Calculer l'image par la fonction carré des réels -3 ; -1 ; 0 ; 2 ; $\sqrt{7}$; $\dfrac{11}{3}$
2. Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas non plus décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème (variations)
La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.
Elle est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration
Soient a, $b \in]-\infty; 0]$. Supposons que $a < b$.

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^2 - b^2 \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Comme on suppose que $a < b$, $a - b < 0$.
Comme a et b sont négatifs (ils appartiennent $]-\infty; 0]$), $a + b < 0$.
D'après la règle des signes, $f(a) - f(b) = (a+b)(a-b) > 0$.
Ainsi, pour tous a et b appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$, si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.
La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On montre de façon analogue qu'elle est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. □

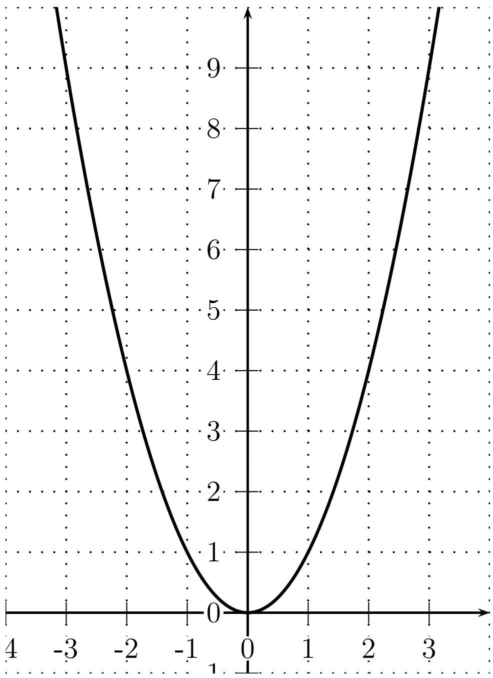
Exercice 2 (comparaison et encadrement)

1. Comparer sans calculatrice les carrés des réels a et b.
   (a) $a = 5,7$ et $b = 5,8$
   (b) $a = -3,17$ et $b = -3,16$
2. Donner le meilleur encadrement de x^2 dans chacun des cas suivants. Justifier.
   (a) $4 < x < 5$
   (b) $-7 \leqslant x \leqslant -6$
   (c) $-5 \leqslant x \leqslant 2$
   (d) $-4 < x \leqslant 9$

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3
x^2									

Propriété (représentation graphique)
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une parabole de sommet O.
L'axe des ordonnées (Oy) est axe de symétrie de la courbe.



Remarque

— La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées se traduit par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.
Autrement dit, deux opposés ont le même carré.
On dit que la fonction carré est paire.

— L'ensemble des valeurs prises par la fonction carré est $[0; +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ (un carré est toujours positif).

Exercice 3
Considérons la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer les antécédents de 9 par f.
2. Rechercher les antécédents de -2 par f.
3. Soit k une nombre réel.
   Résoudre suivant les valeurs de k l'équation $x^2 = k$.

Exercice 4
À l'aide d'un contre-exemple, montrer que les assertions suivantes sont fausses.

1. Si x^2 est positif, alors x est positif.
2. Si $x^2 = 16$, alors $x = 4$.
3. Si $x^2 > 4$, alors $x > 2$.

4. Si $x < 3$, alors $x^2 < 9$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, x^2 est plus grand que x.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+5)^2 = x^2 + 25$.
7. Si $x \neq y$, alors $x^2 \neq y^2$.
8. Si $x < y$, alors $x^2 < y^2$.
9. Si $x \in [-2; 3]$, alors $x^2 \in [4; 9]$.

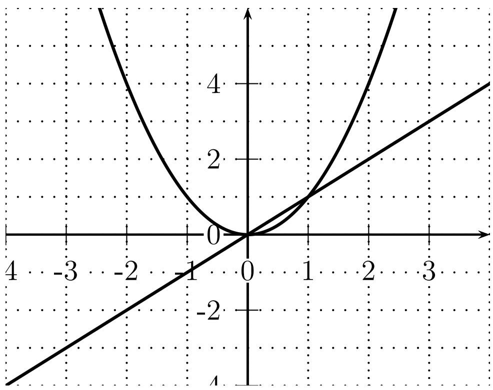
Exercice 5 (activité mentale)

1. Rappeler les trois identités remarquables.
   Pour tous réels a et b,
   (a) ....
   (b) ....
   (c) ....
2. Application
   (a) Développer $(2k+1)^2$
   (b) Calculer $(1+\sqrt{3})^2$
   (c) Calculer $(2-\sqrt{5})^2$
   (d) Calculer $(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})$
   (e) Calculer 97×103

Exercice 6 (comparaison de x et de x^2)

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

1. Donner un réel a vérifiant $a^2 > a$, et un réel b vérifiant $b^2 < b$.
2. Factoriser $f(x) - g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le tableau de signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la comparaison de x^2 et x, et la position relative des courbes de f et g. Vérifier la cohérence avec le graphique ci-dessous.



II La fonction inverse

Définition
La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Remarque
La fonction inverse n'est pas définie en 0 (0 n'a pas d'inverse).

Théorème
La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$,
et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

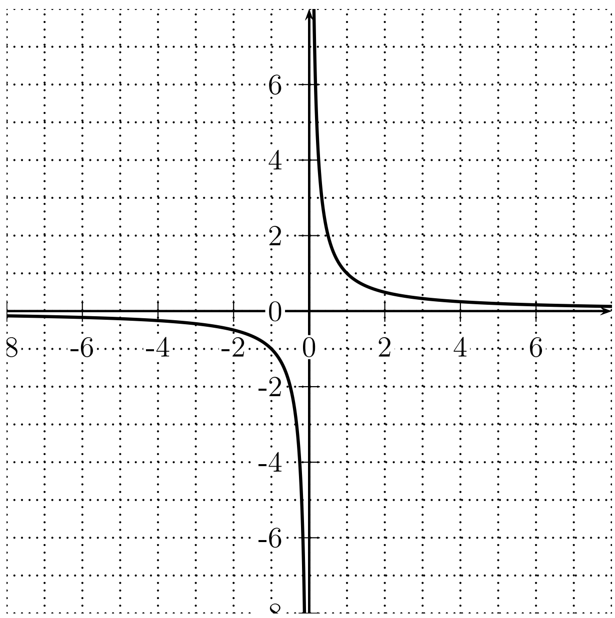
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Exercice 7

1. Comparer les inverses de a et b.
   (a) $a = 1,3$ et $b = 1,4$
   (b) $a = -2,7$ et $b = -2,6$
2. Donner le meilleur encadrement de $\frac{1}{x}$.
   (a) $5 < x < 10$
   (b) $-9 < x < -7$

Exercice 8
Démontrer le théorème relatif aux variations de la fonction inverse.

Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$



Remarque
La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.
L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe :
pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = -f(x)$ (la fonction inverse est une fonction impaire).
Un nombre x non nul et son inverse $\frac{1}{x}$ sont toujours de même signe :
$x > 0$ ssi $\frac{1}{x} > 0$, et $x < 0$ ssi $\frac{1}{x} < 0$.