BTS CRSA2. Correction de l'interrogation n° 6

Exercice 1 (6 points)

Un atelier produit des pièces dont 30 % sont d'excellente qualité. On prélève successivement au hasard 400 pièces dans la production. On note X le nombre de pièces excellentes dans le lot.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(400; 0,3).}$
2. On souhaite approcher X par une variable aléatoire Y suivant une loi normale. Justifier que l'on peut approcher X par une loi normale, et préciser son espérance et son écart-type.
   On vérifie les 3 conditions :
   — $n = 400$ dopnc$n > 30$;
   — $np = 400 \times 0,3 = 120 > 5$, donc $np > 5$;
   — $n(1-p) = 400 \times 0,7 = 280 > 5$, donc $n(1-p) > 5$.
   On peut approcher X par une loi normale. On prend la loi normale qui conserve la même espérance et le même écart-type.
   $\mu = np = 400 \times 0,3 = 120.$
   $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \times 0,3 \times 0,7} = \sqrt{84}$
   $\sigma = 2\sqrt{21} \approx 9,17.$
   On approche X par une variable Y suivant la loi normale .
   $\mathcal{N}(120; 2\sqrt{21})$
3. Pour la suite, on prendra Y la variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(120; 2\sqrt{21})$. Utiliser Y pour approcher, à 10^{-4} près, les probabilités des événements suivants :
   (a) A : "Il y a plus de 110 pièces d'excellente qualité".
   On tient compte de la correction de continuité.
   $P(A) = P(X > 110) = P(X \geqslant 111)$
   $P(A) \approx P(Y > 110,5) \approx 0,850.$
   (b) B : "Il y a entre 100 et 200 pièces d'excellente qualité".
   $P(B) = P(100 \leqslant X \leqslant 200)$
   $P(B) \approx P(99,5 \leqslant Y \leqslant 200,5) \approx 0,987.$
   (c) C : "Il y a moins de 100 pièces d'excellente qualité".
   $P(C) = P(X < 100) = P(X \leqslant 99)$
   $P(C) \approx P(Y < 99,5) \approx 0,013.$
   (d) D : "Le pourcentage de pièces excellentes est supérieur ou égal à 30 %".
   $0,3 \times 400 = 120.$
   $\boxed{P(D) = P(X \geqslant 120) \approx P(Y > 119,5) \approx 0,522.}$

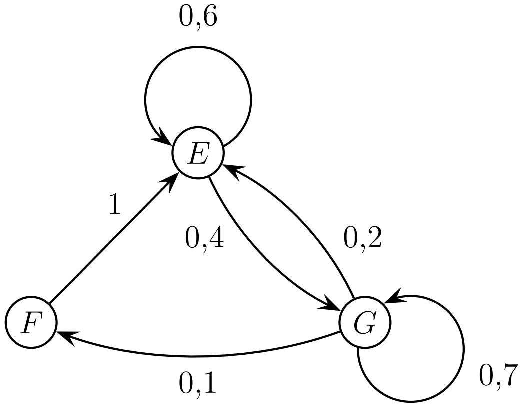
Exercice 2 (4 points)

Une entreprise assemble des trains d'atterrissage. Cet assemblage se fait en deux grandes étapes pouvant prendre plus ou moins de temps. La durée de la première partie de l'assemblage suit une loi normale de moyenne 55 minutes et d'écart-type 10 minutes. La durée de la seconde partie de l'assemblage suit une loi normale de moyenne 27 minutes et d'écart type 3 minutes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque train d'atterrissage, associe la durée totale de son assemblage.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Préciser les paramètres de cette loi.
   $X = T_1 + T_2$ où T_1 suit $\mathcal{N}(55; 10)$ et T_2 suit $\mathcal{N}(27; 3)$.
   $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 55 + 27 = 82.$
   $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109} \approx 10,44.$
   $\boxed{X \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(82; \sqrt{109}).}$
2. Est-il possible qu'un train d'atterrissage soit assemblé en moins d'une heure ?
   Une heure dure 60 minutes, donc $P(X < 60) \approx 0,017$.
   La probabilité que le train d'atterrissage soit assemblé en moins d'une heure est de 0,017 (ce qui représente 1,7 % de chance).

Exercice 3 (4 points)
On considère une chaîne de Markov à 3 états possibles : E, F et G.
On note M la matrice de transition.

1. Compléter la matrice M pour en faire une matrice de transition.
$$T = \begin{pmatrix} . & 0 & 0,4 \\ 1 & . & . \\ 0,2 & 0,1 & . \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 & 0,4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$
La somme des coefficients sur une même ligne fait 1, et les coefficients sont des nombres entre 0 et 1.
2. Représenter le graphe (orienté) de la chaîne de Markov.



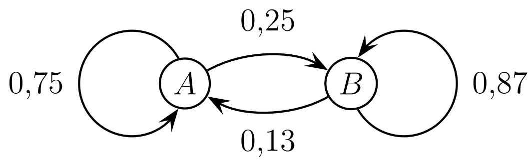
Exercice 4 (6 points)
Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnement :

— l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives,
— l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi.

Chaque adhérent doit choisir un des deux types d'abonnement. La première année, 85 % des adhérents choisissent l'abonnement de type A. On considère ensuite que 25 % des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement l'année suivante, tandis que 13 % des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement l'année suivante. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On note :

— a_n la probabilité qu'un adhérents ait un abonnement de type A la $n^{\text{ième}}$ année.
— b_n la probabilité qu'un adhérent ait un abonnement de type B la $n^{\text{ième}}$ année.
— $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de la $n^{\text{ième}}$ année.

1. Donner P_1.
$a_1 = 0,85$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$,
donc $b_1 = 1 - a_1 = 1 - 0,85 = 0,15$.
$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \end{pmatrix}}$$
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.



3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
$$M = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,13 & 0,87 \end{pmatrix}$$
4. Déterminer la matrice P_3.
$P_3 = P_1 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0,537\,34 & 0,462\,66 \end{pmatrix}$
5. En déduire la probabilité qu'un adhérent choisisse l'abonnement de type A la 3$^{\text{e}}$ année.
$\boxed{\text{La probabilité qu'un adhérent choisisse l'abonnement } A \text{ la } 3^{\text{e}} \text{ année est } 0{,}537\,34.}$