# Chapitre 14 : Complément sur la dérivation

## I Activité d'introduction

**Exercice 1**

1. Compléter le tableau de rappels sur la dérivation.

| Expression de $f(x)$ | $a$ (constante) | $x$ | $x^2$ | $x^n$ ($n \geqslant 1$) | $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) | $\sqrt{x}$ ($x > 0$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Expression de $f'(x)$ | | | | | | |

| Expression de $f(x)$ | $\mathrm{e}^x$ | $\ln(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| Expression de $f'(x)$ | | | | |

2. Des cas particuliers de dérivée d'une composée de fonctions
$u$ désigne une fonction dérivable sur un intervalle $I$, alors que $a$, $b$ sont des réels.

| Expression de $f(x)$ | $\mathrm{e}^u$ | $\ln(u)$ ($u > 0$) | $\sin(ax+b)$ | $\cos(ax+b)$ |
|---|---|---|---|---|
| Expression de $f'(x)$ | | | | |

3. Applications. Dériver les fonctions.
   (a) $f(x) = \mathrm{e}^{0{,}01x+9}$ ..........................................................................
   (b) $f(x) = \ln(3x+1)$ ..........................................................................
   (c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2\pi}x + \pi\right)$ ..........................................................................
   (d) $f(x) = \cos(5x-3)$ ..........................................................................

## II Composition de fonctions

**Définition**
Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, et prenant ses valeurs dans une partie $J$ de $\mathbb{R}$. Soit $g$ une fonction définie sur $J$.
La composée de $u$ suivie de $g$ est la fonction $f$ définie sur $I$ par $f(x) = \ldots\ldots\ldots$
On la note $g \circ u$.

Illustration
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

**Exercice 2**
Déterminer l'expression de la fonction.

1. $f = g \circ u$ avec $g(x) = x^2$ et $u(x) = 2x+3$.
2. $h = g \circ u$ avec $g(x) = 2x+3$ et $u(x) = x^2$
3. $k = g \circ u$ avec $g(x) = 2x+3$ et $u(x) = \sin x$

# III Dérivée d'une composée de deux fonctions

**Exercice 3**
On reprend les fonctions de l'exercice précédent. Dériver les fonctions $f$, $h$ et $k$.

**Théorème**
Soient $u : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables.
Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur $I$ et

$$\text{pour tout } x \in I,\ f'(x) = g'\left(u(x)\right) \times u'(x).$$

Cela s'écrit aussi $(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$

**Exercice 4 (démonstration)**
On rappelle que le taux d'accroissement d'une fonction $f$ entre $x_0$ et $x$ est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1. Soit $x_0 \in I$. Écrire le taux d'accroissement de $u$ entre $x_0$ et $x$.
2. Vérifier que le taux d'accroissement de $g \circ u$ entre $x_0$ et $x$ s'écrit
$$\frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$
3. Passer à la limite lorsque $x \to x_0$ et conclure.

**Propriété (cas particuliers)**
Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

| Fonction $g$ | Fonction $f = g \circ u$ | Dérivée de $f$, soit $f' = (g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^u$ | |
| $\ln(x)$ | ($u > 0$ sur I) | |
| $\sin(x)$ | | |
| $\cos(x)$ | | |
| $x^n$ | ($n$ entier relatif)<br>($u \neq 0$ pour $n$ négatif) | |
| $\dfrac{1}{x}$ | ($u \neq 0$) | |

**Exercice 5**
Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $A(x) = \mathrm{e}^{-9x+5}$
2. $B(x) = \ln(3x^2 - 11)$
3. $C(x) = \sin(1 - x^2)$
4. $D(x) = (5x + 4)^3$