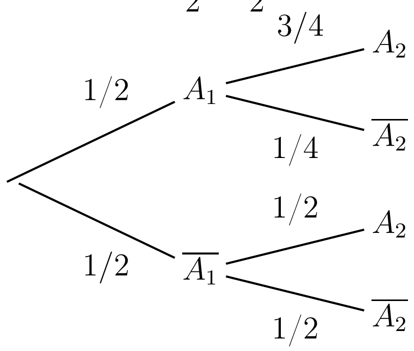
1G. Correction du devoir maison n° 5.

Exercice 1 (le stand de tir)
La probablité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité d'atteindre la suivante est $\frac{3}{4}$.

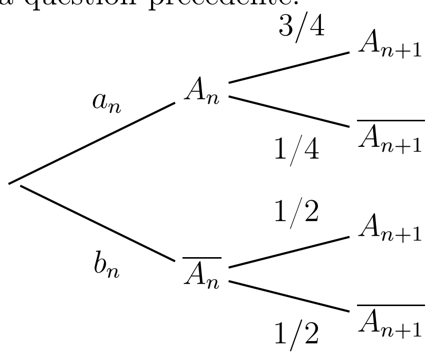
Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité d'atteindre la suivante est $\frac{1}{2}$.
On note A_n : " La n^e cible est atteinte", et $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(\overline{A_n})$.
Remarque : pour tout n$\geqslant$ 1, on a $b_n = 1 - a_n$.

1. Donner a_1, b_1, puis déterminer a_2, b_2.
   $a_1 = P(A_1) = \frac{1}{2}$. Donc $b_1 = 1 - a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.



   A_1 et $\overline{A_1}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probablités totales,
   $a_2 = P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0,625$.
   $b_2 = 1 - a_2 = 1 - 0,625 = 0,375$.

2. Montrons que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$ puis $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.
   On généralise le travail de la question précédente.



   Toujours d'après les probabilités totales, il vient :
   $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = a_n \times \frac{3}{4} + b_n \times \frac{1}{2}$.
   Or, on sait que $b_n = 1 - a_n$, donc
   $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.

3. Algorithme qui retourne a_n.
   La suite (a_n) est définie par $a_1 = \frac{1}{2}$, et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$.
   On répond sous la forme d'une fonction Python :

```
def terme(n) :
    a=0.5
    for k in range(2,n+1) :
        a=0.25*a+0.5
    return(a)
```

4. On pose $u_n = a_n - \frac{2}{3}$ pour tout $n \geqslant 1$.

(a) Montrons que (u_n) est géométrique, et donnons ses éléments caractéristiques.
$u_1 = a_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$.
Pour tout $n \geqslant 1$,
$u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$.
$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + \frac{2}{3}) - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}u_n$.
On a utilisé $a_n = u_n + \frac{2}{3}$ car $u_n = a_n - \frac{2}{3}$.
(u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_1 = -\frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

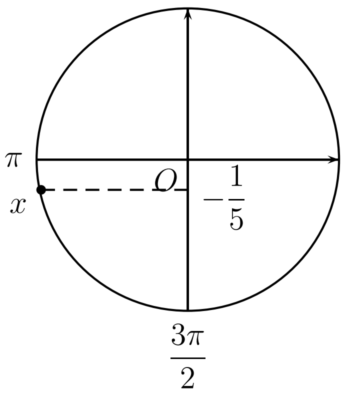
(b) Expression de u_n, puis de a_n.
Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
Enfin, comme $u_n = a_n - \frac{2}{3}$, $a_n = u_n + \frac{2}{3}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(c) Calcul de a_{10}.
$a_{10} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{9} \approx 0,6667$.
On retrouve ce résultat avec la fonction Python et le mode suite de la calculatrice.

Exercice 2

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = -\frac{1}{5}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$.
Ainsi, $\cos x = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.
Comme x appartient à $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$.
Finalement, $\boxed{\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.}$