1re G. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 5
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 1,5 point)

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(u+v)$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
2. $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$
3. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_1 = \frac{4}{5}u_0 + 5 = \frac{4}{5} \times 100 + 5 = 85.$ $\quad u_2 = \frac{4}{5}u_1 + 5 = \frac{4}{5} \times 85 + 5 = 73.$
   $u_3 = \frac{4}{5}u_2 + 5 = \frac{4}{5} \times 73 + 5 = \frac{317}{5} = 63,4.$
2. Donner la valeur de u_{10} arrondie à 10^{-2} près. $\quad u_{10} \approx 33,05.$
3. Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
```
def Terme(n) :
    u=100
    for k in range(1,n+1):
        u=4/5*u+5
    return(u)
```
4. Écrire une fonction Python d'argument $n \geqslant 0$ qui renvoie la somme des termes de u_0 à u_n, soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
```
def Somme(n) :
    u=100
    S=u
    for k in range(1,n+1):
        u=4/5*u+5
        S=S+u
    return(S)
```

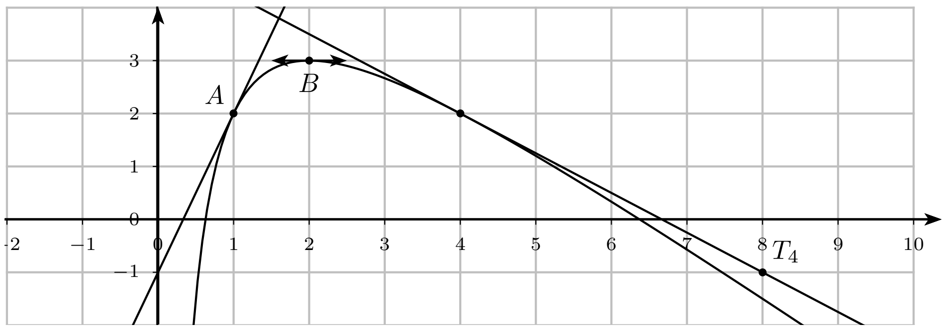
Exercice 3 (3,5 points)

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]5;+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x-5}$ est dérivable en 8, et que $f'(8) = -\frac{1}{3}$.
   Soit $h \neq 0$.
   $$\frac{f(8+h)-f(8)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{3}{8+h-5} - 1\right) = \frac{1}{h} \times \left(\frac{3}{h+3} - 1\right) = \frac{3-(h+3)}{h(h+3)} = \frac{-h}{h(h+3)} = \frac{-1}{h+3}.$$
   Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(8+h)-f(8)}{h} = -\frac{1}{3}$. $\boxed{f \text{ est dérivable en 8 et } f'(8) = -\frac{1}{3}.}$
2. À l'aide des opérations sur les dérivées, calculer $f'(x)$ pour tout $x > 5$, et retrouver la valeur de $f'(8)$.
   Pour tout $x > 5$, $f(x) = 3 \times \frac{1}{x-5}$. On rappelle $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
   Donc, pour tout $x > 5$, $f'(x) = 3 \times \frac{-1}{(x-5)^2} = -\frac{3}{(x-5)^2}$.
   $\boxed{f'(8) = -\frac{3}{(8-5)^2} = -\frac{1}{3}.}$
3. En déduire une équation de la tangente T_8.
   On sait que $f'(8) = -\frac{1}{3}$, et $f(8) = \frac{3}{8-5} = 1$.
   $y = f'(8)(x-8) + f(8) = -\frac{1}{3}(x-8) + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}.$
   $\boxed{\text{Une équation de } T_8 \text{ est } y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}.}$

Exercice 4 (3 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B.

1. Déterminer deux nombres dérivés de f à l'aide du graphique. Justifier.
   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 1. $\boxed{\text{On lit } f'(1) = 3.}$
   $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en B. Comme elle est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul et donc $\boxed{f'(2) = 0.}$
2. On admet que $f'(4) = -\frac{3}{4}$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.



Exercice 5 (2 points)
Étudier s'il existe des points de la courbe de la fonction racine carrée ($f(x) = \sqrt{x}$) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 6$.
Si oui, préciser les abscisses de ces points.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a au point d'abscisse a.
La tangente T_a est parallèle à la droite d'équation $y = x + 6$ ssi elle a le même coefficient directeur, ce qui équivaut à $f'(a) = 1$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ainsi, $\dfrac{1}{2\sqrt{a}} = 1$ ssi $2\sqrt{a} = 1$ ssi $\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}$ ssi $a = \dfrac{1}{4}$.

$\boxed{\text{Il existe une seule tangente à la courbe de } f \text{ parallèle à la droite d'équation } y = x+6, \text{ c'est au point d'abscisse } \frac{1}{4}.}$

Exercice 6 (2 points)
La tangente à la courbe de la fonction cube ($f(x) = x^3$) au point d'abscisse 1 passe-t-elle par le point $E(4; 11)$? Justifier.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :
$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.
On étudie si le point $E(4; 11)$ appartient à cette droite.
$3x_E - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10 \neq y_E$.

$\boxed{\text{Cette tangente ne passe pas par le point } E.}$

Exercice 7 (4 points)
Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
   $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 6x^2.}$
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.
   $\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.}$
3. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 5}$.
   $\boxed{f'(x) = \dfrac{(2x - 3)(x - 5) - (x^2 - 3x) \times 1}{(x - 5)^2} = \dfrac{x^2 - 10x + 15}{(x - 5)^2}.}$

Réponses non détaillées du sujet 2

Exercice 8 (cours, 1,5 point)
Compléter sur l'énoncé. Opérations sur les dérivées.
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$
2. $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$
3. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

Exercice 9 (4 points)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. $\boxed{u_1 = 6,\ u_2 = 12,\ u_3 = 21}$
2. Donner u_{10} arrondi à 10^{-2} près. $\boxed{u_{10} \approx 455,32}$
3. Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.
```
def Terme(n) :
    u=2
    for k in range(1,n+1):
        u=3/2*u+3
    return(u)
```
4. Écrire une fonction Python d'argument $n \geqslant 0$ qui renvoie la somme des termes de u_0 à u_n, soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
```
def Somme(n) :
    u=2
    S=u
    for k in range(1,n+1):
        u=3/2*u+3
        S=S+u
    return(S)
```

Exercice 10 (3,5 points)
1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$ est dérivable en -1, et que $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.
   Soit $h \neq 0$.
   $\dfrac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \dfrac{1}{h} \times \left(\dfrac{2}{-1 + h - 1} - (-1)\right) = \dfrac{1}{h} \times \left(\dfrac{2}{h - 2} + 1\right) = \dfrac{2 + (h - 2)}{h(h - 2)} = \dfrac{h}{h(h - 2)} = \dfrac{1}{h - 2}$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } f'(-1) = -\dfrac{1}{2}.}$

2. À l'aide des opérations sur les dérivées, calculer $f'(x)$ pour tout $x < 1$, et retrouver la valeur de $f'(-1)$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x < 1,\ f'(x) = \dfrac{-2}{x-1)^2}, \text{ donc } f'(-1) = \dfrac{-1}{(-2)^2} = -dfrac12.}$

3. En déduire une équation de la tangente T_{-1} à la courbe de f au point d'abscisse -1 (on ne demande pas de tracer la courbe ni la tangente).

   On sait que $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$, et $f(-1) = \dfrac{2}{-1-1} = -1$.

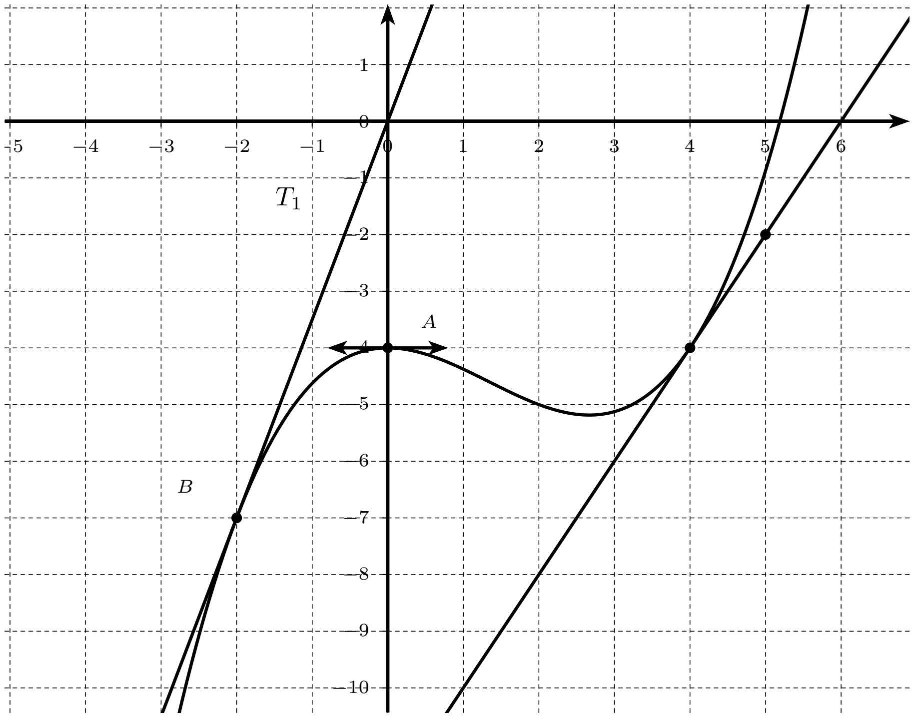
   $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) = -\dfrac{1}{2}(x+1) - 1 = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

   $\boxed{\text{Une équation de } T_{-1} \text{ est } y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}.}$

Exercice 11 (3 points)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.



1. Déterminer graphiquement deux nombres dérivés de f. Justifier.

   $\boxed{f'(a) \text{ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse } a.\ f(0) = 0, \text{ et } f'(-2) = 3,5.}$

2. On admet que $f'(4) = 2$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 12 (2 points)

Étudier s'il existe des points de la courbe de la fonction racine carrée ($f(x) = \sqrt{x}$) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x - 1$.

Si oui, préciser les abscisses de ces points.

$T_a // d$ ssi $f'(a) = \dfrac{1}{4}$ ssi $\dfrac{1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{1}{4}$ ssi $\sqrt{a} = 2$ ssi $a = 4$.

$\boxed{\text{Il existe une tangente à la courbe de } f \text{ parallèle à cette droite, c'est au point d'abscisse 4.}}$

Exercice 13 (2 points)

La tangente à la courbe de la fonction cube ($f(x) = x^3$) au point d'abscisse 1 passe-t-elle par le point $E(4; 11)$? Justifier.

Voir sujet 1

Exercice 14 (4 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -5x^4 + 24x^2 + 2.}$

2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (3-2x)\sqrt{x}$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ f'(x) = -2\sqrt{x} + (3-2x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.}$

3. f est définie sur $]-9; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5-x}{x+9}$.

   $\boxed{\text{Pour } x > -9,\ f'(x) = \dfrac{-1(x+9) - (5-x)\times 1}{(x+9)^2} = -\dfrac{14}{(x+9)^2}.}$