Devoir de mathématiques n° 2
Éléments de correction. Sujet 1

Exercice 1 (1 point)

Énoncer la formule des probabilités totales associée à une partition A_1, A_2, $\dots$, A_n de l'univers.

Pour tout événement B,
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$
$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. Justifier.
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \times 2 \times 2 = 25 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. $\qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{4} = 2$.
$\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 2\right\}}$

2. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.
$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4}$. $\qquad \beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = -\dfrac{25}{8}$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S\left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{25}{8}\right)$.
Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-25/8$	$\nearrow$	

3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-1 \leq x \leq 3$. Justifier.
$f(-1) = 2 + 3 - 2 = 3$. $\qquad f(3) = 18 - 9 - 2 = 7$.
Sur l'intervalle $[-1; 3]$, le tableau de variation est le suivant :

x	-1		$3/4$		3
$f(x)$	3	$\searrow$	$-25/8$	$\nearrow$	7

Comme le minimum est de $-\dfrac{25}{8}$ et le maximum de 7, on obtient :
$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1; 3],\ -\dfrac{25}{8} \leqslant f(x) \leqslant 7.}$

4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite (d) d'équation $y = -5x + 2$.
On étudie le signe de $f(x) - (-5x + 2)$.
$f(x) - (-5x + 2) = 2x^2 - 3x - 2 + 5x - 2 = 2x^2 + 2x - 4$.
$\Delta = 36 > 0$, puis les racines sont -2 et 1.
Le trinôme $f(x) - (-5x + 2)$ est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x) - (-5x + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de (d) sur $]\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.
Et $\mathscr{C}$ est en-dessous de (d) sur $]-2; 1[$.

Exercice 3 (4 points)

1. La partie restante du terrain est un rectangle de dimensions $(30 - x)$ et $(12 - x)$.
Son aire a pour expression :
$(30 - x)(12 - x) = x^2 - 30x - 12x + 30 \times 12 = x^2 - 42x + 360$.
On souhaite que cette aire soit supérieure à 280.
D'où l'inéquation :
$$\begin{aligned} x^2 - 42x + 360 &\geqslant 280 \\ x^2 - 42x + 80 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

2. On étudie le signe du trinôme $x^2 - 42x + 80$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444 = 38^2 > 0$.
Le trinôme a donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{42 - 38}{2} = 2$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{42 + 38}{2} = 40$
Le trinôme est positif (signe de a, ici $a = 1$) à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines.

x	$-\infty$		2		40		$+\infty$
$x^2 - 42x + 80$		$+$	0	$-$	0	$+$	

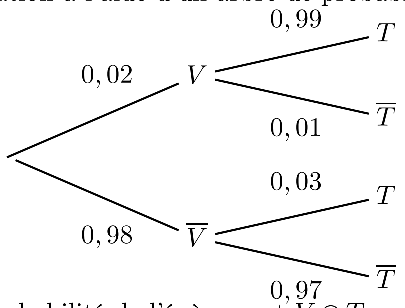
Donc $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$ sur $]-\infty; 2] \cup [40; +\infty[$.
D'après le contexte, la largeur x du chemin est comprise en 0,8 m et 12 m.
Donc la largeur du chemin doit être entre 0,8 m et 2 m.

Exercice 4 (2 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$.
On pose $U = x^2$, l'équation s'écrit $U^2 + 7U - 8 = 0$.
$\Delta = 81 > 0$, $U_1 = -8$, et $U_2 = 1$.
On étudie les équations $x^2 = -8$ et $x^2 = 1$.
L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution réelle car un carré est toujours positif.
$x^2 = 1$ ssi $x = -1$ ou $x = 1$.

$\boxed{\text{Les solutions sont } -1 \text{ et } 1.}$

Exercice 5 (5 points)

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

   $\boxed{P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198.}$

2. Déterminer $P(T)$. Justifier.
   V et $\overline{V}$ forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales,

   $\boxed{P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492.}$

3. (a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   $$\boxed{P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024.}$$

   En effet, si la personne a un test positif, il y a environ 40% de "chances" qu'elle soit contaminée par le virus.

   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.
   $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508$.

   Donc $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{0,9508} \approx 0,9998$.

   Sachant que son test est négatif, la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée est d'environ 0,9998.

Exercice 6 (3 points)
On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 70% des messages reçus sont des spams
- 95% des spams sont éliminés
- 2% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	665	6	671
Messages conservés	35	294	329
Total	700	300	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.

   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.

   $P(S) = \dfrac{700}{1000} = 0,7$; $P(E) = 0,671$; $P(S \cap E) = 0,665$; et $P_S(\overline{E}) = \dfrac{35}{700} = 0,05$.

   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.
   S et E sont indépendants ssi $P(E) = P_S(E)$.
   Or, $P(E) = 0,671$, et $P_S(E) = 0,95$ (d'après l'énoncé : 95% des spams sont éliminés).
   Sinon, $P_S(E) = 1 - P_S(\overline{E}) = 1 - 0,05 = 0,95$.

   Donc $P(E) \neq P_S(E)$. S et E ne sont pas indépendants.

Exercice 7 (bonus, 1 point)
Soient A et B des événements tels que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 1$, et $P(B) \neq 1$.
Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.
On suppose que A et B sont indépendants, soit $P_B(A) = P(A)$.
On veut montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, soit $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
On a toujours $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

$$\begin{aligned} P_B(\overline{A}) &= 1 - P_B(A) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(\overline{A}) \end{aligned}$$

En effet, comme A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$.
Donc $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.

Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Devoir de mathématiques n° 2

Sujet 2 Réponses non détaillées

Exercice 8 (1 point)

Donner la définition de deux événements A et B indépendants.

A et B sont indépendants si $P(A) = P_B(A)$.
Lorsque $P(B) = 0$, on considère que A et B sont indépendants.

Exercice 9 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. Justifier. $\boxed{\text{Les solutions sont } -\frac{1}{2} \text{ et } 2.}$
2. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$25/8$	$\searrow$

3. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Justifier.

Pour tout $x \in [-1;3]$, $-7 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{25}{8}$.

4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite (d) d'équation $y = 5x - 2$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x) - (5x - 2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de (d) sur $]\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.
Et $\mathscr{C}$ est au-dessus de (d) sur $]-2;1[$.

Exercice 10 (4 points)

Voir sujet 1

Exercice 11 (2 points)

Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ n'ait pas de solution réelle.

L'équation n'a pas de solution ssi $\Delta < 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4a = 169 - 4a$.
Donc $169 - 4a < 0$ ssi -4a<-169, ssi $a > \dfrac{169}{4}$.

Donc l'équation n'a pas de solution lorsque $a > \dfrac{169}{4}$.

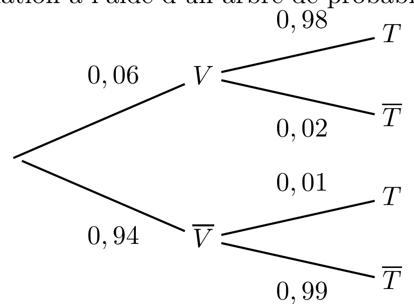
Exercice 12 (5 points)

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a $6\,\%$ de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,98$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,99$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



(b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

$P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,06 \times 0,98 = 0,0588.$

2. Déterminer la probabilité que le test soit positif.

$P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0588 + 0,94 \times 0,01 = 0,0682.$

3. (a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier. « Si le test est positif, il n'y a qu'environ $40\,\%$ de « chances » que la personne soit contaminée ».

$P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0588}{0,0682} \approx 0,86$. L'affirmation est fausse.

(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

$P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,94 \times 0,99}{1 - 0,0682} \approx 0,9987.$

Exercice 13 (3 points)

On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 75% des messages reçus sont des spams
- 96% des spams sont éliminés

- 4% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant (aucune justification n'est attendue) :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	720	10	730
Messages conservés	30	240	270
Total	750	250	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.

   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.

   $\boxed{P(S) = \frac{750}{1000} = 0,75\,;\ P(E) = 0,73\,;\ P(S \cap E) = 0,72\,;\ \text{et}\ P_S(\overline{E}) = \frac{30}{750} = 0,04.}$

   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.
   S et E sont indépendants ssi $P(E) = P_S(E)$.
   Or, $P(E) = 0,73$, et $P_S(E) = 0,96$ (d'après l'énoncé : 96% des spams sont éliminés).
   $\boxed{\text{Donc } P(E) \neq P_S(E).\ S \text{ et } E \text{ ne sont pas indépendants.}}$

Exercice 14 (bonus, 1 point)

Soient A et B des événements tels que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 1$, et $P(B) \neq 1$.
Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.
Voir sujet 1.