Chapitre 6 : Calcul littéral

I Factorisation et développement

Rappel :
Une expression est développée si l'opération principale (à l'extérieur des parenthèses) est une addition ou une soustraction.
Une expression est factorisée si l'opération principale (à l'extérieur des parenthèses) est une multiplication ou une division.

Exercice 1 (reconnaître la nature d'une expression)
Compléter.
L'expression $x + \frac{3}{x} + 7(x+4)$ est ....
C'est une ....
L'expression $(x+5)(6x-1)$ est ....
C'est ....
L'expression $\frac{5x}{2x-1} - 5$ est ....
C'est ....
L'expression $\frac{-4}{2x-1}$ est ....
C'est ....

Propriété
Pour tous nombres réels a, b, c, d et k,

$$\begin{aligned} k(a+b) &= ka+kb \\ (a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd \end{aligned}$$

Exercice 2
Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = 5x(2x^3 - 4)$.
   ....
   ....
2. $B(x) = (7-3x)(11+x^2)$
   ....
   ....
3. $C(x) = 4 - 3(x+2)(x+5)$
   ....
   ....

Théorème (identités remarquables)
Pour tous nombres réels a et b,

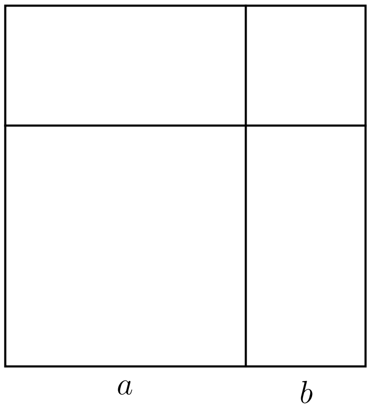
1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Remarque
Les identités remarquables permettent de passer d'une forme développée à une forme factorisée, et inversement.

Démonstration
On développe les expressions factorisées. Pour tous réels a et b,

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$. $\square$

Illustration géométrique de la première identité remarquable.
Pour des nombres a et b positifs, $(a+b)^2$ est l'aire du carré de côté $(a+b)$.
Par découpage, on observe que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Exercice 3
Développer à l'aide d'une identité remarquable.
$(x+7)^2 =$
$(5x-4)^2 =$
$(1-6x)(1+6x) =$

Exercice 4
Factoriser à l'aide d'une identité remarquable.
$49x^2 - 25 =$
$4x^2 - 4x + 1 =$
$36x^2 + 24x + 4 =$

Exercice 5
Factoriser les expression suivantes à l'aide d'un facteur commun.
$A(x) = (x-1)(3x+4) + x - 1$
$B(x) = (2x-3)(x+15) + 3 - 2x$
$C(x) = (x+4)x^2 + 3x + 12$

Exercice 6
Factoriser les expressions suivantes en mettant au même dénominateur.
$A(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5x+1}{6}$
$B(x) = 5 - \dfrac{3x+7}{4}$
$C(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x}$
$D(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x+5}$

II Problèmes

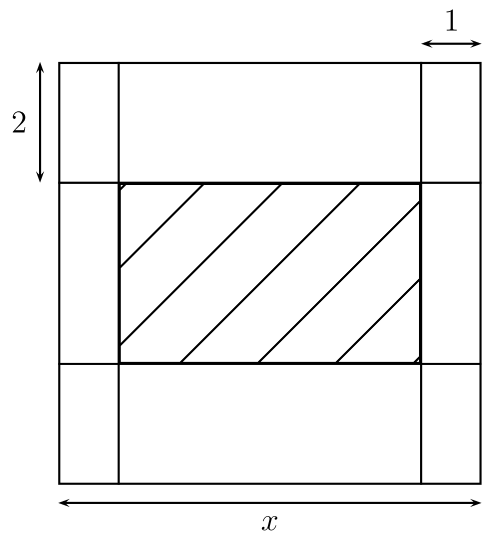
Exercice 7 (montrer que deux expressions sont égales, position relative)
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)^2 - x$ et $g(x) = -8x + 29$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = (x-4)(x+5)$
2. En déduire le signe de $f(x) - g(x)$.
3. En déduire la position relative des courbes de f et de g.

Exercice 8 (choisir la forme adaptée)
On dispose de 3 expressions :
$(x-3)^2 - (2-5x)(x-3)$ $\qquad$ $6x^2 - 23x + 15$ $\qquad$ $(x-3)(6x-5)$

1. Montrer que ces 3 expressions définissent une même fonction f.
2. Utiliser l'expression adéquate de $f(x)$ pour :
   (a) Déterminer les images de 0, $\sqrt{2}$, $\dfrac{5}{6}$ et $(1+\sqrt{5})$.
   (b) résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (c) déterminer les antécédents de 15 par f.

Exercice 9 (problème)
On désire imprimer une carte de vœux carrée. On souhaite cependant laisser une marge de 2 cm en haut et en bas, et une marge de 1 cm à gauche et à droite.



1. On suppose que le côté du carré mesure 7 cm.
   Déterminer l'aire de la surface imprimable (partie hachurée sur la figure).
2. Désormais, on suppose que le côté du carré mesure x cm, x appartenant à l'intervalle $[5; 10]$, et on note $f(x)$ l'aire en cm^2 de la surface imprimable.
   (a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x et vérifier que $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
   (b) Montrer que $f(x) = (x-3)^2 - 1$.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = 8$, et en déduire la longueur du côté de la carte dont la surface imprimable est de 8 cm^2.