Exercices de préparation du second contrôle commun de 1re S
Quelques corrigés

1 Probabilités

Exercice 1
Les deux frères Bola, Tim et Tom, ont chacun organisé une tombola.
Tim propose 100 billets, dont 30 gagnants répartis comme suit :
- 1 lot de 250 euros,
- 4 lots de 50 euros,
- 25 lots de 2 euros.

Tom propose également 100 billets, dont les gagnants sont répartis comme suit :
- 5 lots de 20 euros,
- 10 lots de 15 euros,
- 15 lots de 10 euros,
- 20 lots de 5 euros.

Dans chaque tombola, le prix du billet est de 5 euros.
Soient respectivement X et Y les gains algébriques liés à l'achat d'un billet chez Tim et Tom.

1. Variable aléatoire X.
   (a) Justifier que $P(X=-5)$ est égal à $0,7$.
   $X=-5$ correspond à l'événement : le billet acheté à la tombola de Tim est un billet perdant.
   $100-30=70$.
   Comme il y a 70 billets perdants, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(X=-5) &= \frac{nb\ cas\ favorables}{nb\ cas\ total} \\ &= \frac{70}{100} \\ &= 0,7 \end{aligned}$$

   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   $250-5=245$.
   $50-5=45$.
   $2-5=-3$.
   $0-5=-5$.
   Les valeurs possibles de X sont -5, -3, 45 et 245.
   On a vu que $P(X=-5)=0,7$.
   $P(X=-3)=\frac{25}{100}=0,25$.
   $P(X=45)=\frac{4}{100}=0,04$.
   $P(X=245)=\frac{1}{100}=0,01$.
   La loi de probabilité de X se résume donc par le tableau :

x_i	-5	-3	45	245
$P(X=x_i)$	0,7	0,25	0,04	0,01

2. Variable aléatoire Y.
   On donne partiellement la loi de probabilité de Y ci-dessous :

y_i	-5	0	5	10	15
$P(Y=y_i)$	...	0,2	0,15	0,1	0,05

   Compléter la loi de probabilité de Y. Justifier.
   $5+10+15+20=50$.
   Il y a 50 billets gagnants à la tombola de Tom.
   $100-50=50$. Il y a donc 50 billets perdants.
   $\boxed{P(Y=-5)=\frac{50}{100}=0,5.}$
   On peut vérifier que $\sum P(Y=y_i)=1$.

3. Pour chaque tombola calculer la probabilité de gagner au moins 5 euros.
   Les valeurs possibles de X sont -5, -3 ; 45 et 245.
   $P(X \geqslant 5) = P(X = 45) + P(X = 245) = 0,04 + 0,01 = 0,05$.
   Les valeurs possibles de Y sont -5, 0, 5, 10 et 15.
   $P(Y \geqslant 5) = P(Y = 5) + P(Y = 10) + P(Y = 15) = 0,15 + 0,1 + 0,5 = 0,3$.

Chez Tim, la probabilité de gagner au moins 5 euros est de 0,05. Chez Tom, la probabilité de gagner au moins 5 euros est de 0,3.

4. Calculer l'espérance mathématique de chacune des variables aléatoires X et Y. Comparer et interpréter.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i \times P(X = x_i) \\ &= -5 \times 0,7 - 3 \times 0,25 + 45 \times 0,04 + 245 \times 0,01 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum y_i \times P(Y = y_i) \\ &= -5 \times 0,5 + 0 \times 0,2 + 5 \times 0,15 + 10 \times 0,1 + 15 \times 0,05 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans les deux cas le jeu est équitable puisque l'espérance est nulle.

5. Calculer la variance et l'écart-type de chacune des variables aléatoires X et Y. Que pourrait-on conseiller à Eva, qui hésite entre Tim et Tom, sachant qu'elle n'a pas le goût du risque ?

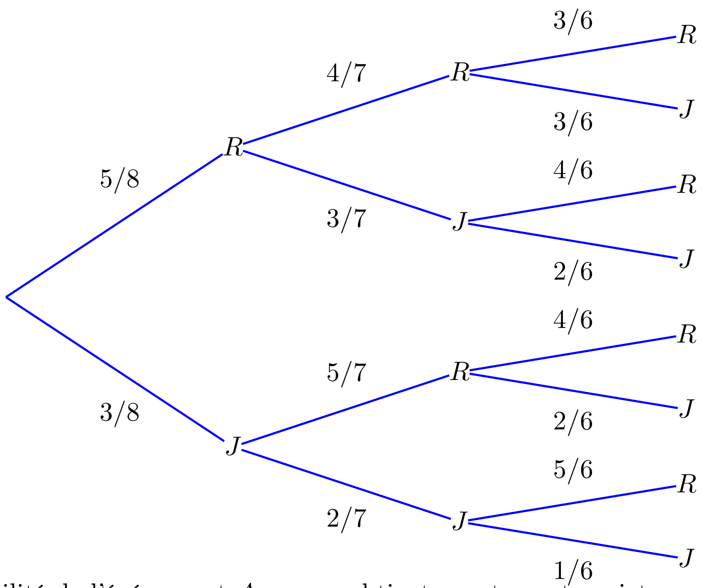
$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ V(X) &= \sum {x_i}^2 p_i - 0^2 \\ V(X) &= (-5)^2 \times 0,7 + (-3)^2 \times 0,25 + 45^2 \times 0,04 + 245^2 \times 0,01 \\ V(X) &= 701 \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ \sigma(X) &= \sqrt{701} \\ \sigma(X) &\approx 26,48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ V(Y) &= \sum {y_i}^2 p_i - 0^2 \\ V(Y) &= (-5)^2 \times 0,5 + 0^2 \times 0,2 + 5^2 \times 0,15 + 10^2 \times 0,1 + 15^2 \times 0,05 \\ V(Y) &= 37,5 \\ \sigma(Y) &= \sqrt{V(Y)} \\ \sigma(Y) &= \sqrt{37,5} \\ \sigma(Y) &\approx 6,12 \end{aligned}$$

On rappelle que $E(X) = E(Y) = 0$. Les deux tombolas ont la même espérance. Or, $\sigma(Y) < \sigma(X)$. Cela signifie que dans la tombola proposée par Tom, la dispersion des gains par rapport à l'espérance (0) est moins importante. Eva, joueuse prudente, doit donc préférer la tombola de Tom.

Exercice 2
(2,5 points)
Une urne contient 5 jetons rouges (R) et 3 jetons jaunes (N). On tire successivement et sans remise 3 jetons. À chaque tirage, tous les jetons présents dans l'urne ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.



2. Calculer la probabilité de l'événement A : « on obtient exactement un jeton rouge ».
   Il y a 3 chemins sur l'arbre qui correspondent à un tirage donnant exactement un jeton rouge.
   L'événement A est constitué des 3 événements élémentaires $(R;J;J)$, $(J;R;J)$, et $(J;J;R)$.

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(R;J;J)+P(J;R;J)+P(J;J;R)\\
&= \frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\\
&= 3\times\frac{5\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}\\
&= \frac{15}{56}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir exactement un jeton rouge est de } \frac{15}{56}.}$

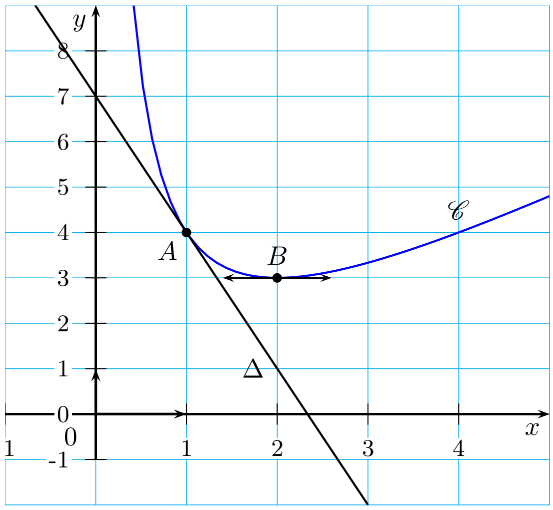
3. Calculer la probabilité de l'événement B : « on obtient au moins un jeton rouge ».
   $\overline{B}$ est l'événement : « on obtient 3 jetons jaunes ».

$$\begin{aligned}
P(\overline{B}) &= P(J;J;J)\\
P(\overline{B}) &= \frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\\
P(\overline{B}) &= \frac{1}{56}\\
P(B) &= 1-P(\overline{B})\\
&= 1-\frac{1}{56}\\
&= \frac{55}{56}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir au moins un jeton rouge est de } \frac{55}{56}.}$

2 Dérivation

Exercice 3 (correction)
Le graphique ci-dessous donne la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.
La tangente au point B à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Lire graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f(2)$.
   $f(1)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1. $\boxed{\text{Donc } f(1) = 4.}$
   De même, $\boxed{f(2) = 3.}$
2. Déterminer à l'aide du graphique, mais en justifiant, les valeurs de $f'(1)$ et $f'(2)$.
   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1, donc au point A.
   Cette tangente est la droite Δ, passant par $A(1;4)$ et $C(2;1)$.
   Elle a une équation de la forme $y = mx + p$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \\ &= \frac{1-4}{2-1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

   Donc $f'(1) = -3$.
   $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B (d'abscisse 2).
   Comme cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul. Donc $f'(2) = 0$.
   $\boxed{f'(1) = -3 \text{ et } f'(2) = 0.}$
3. Déterminer une équation de la droite Δ.
   On a vu que Δ a pour coefficient directeur -3.
   Δ a donc une équation de la forme $y = -3x + p$.
   On remplace x et y par les coordonnées d'un point de Δ, par exemple A.

$$\begin{aligned} y_A &= -3x_A + p \\ 4 &= -3 \times 1 + p \\ p &= 7 \end{aligned}$$

   L'ordonnée à l'origine est 7, comme on peut le vérifier sur le graphique.
   $\boxed{\text{Donc } \Delta \text{ a pour équation } y = -3x + 7.}$
4. On admet désormais que f a une expression de la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{4}{x}$.
   (a) En s'aidant des résultats de la question 1., déterminer a et b et donner l'expression de $f(x)$ pour tout $x > 0$. .
   $f(1) = a \times 1 + b + \dfrac{4}{1} = a + b + 4$.
   Or, on sait que $f(1) = 4$.
   D'où $a + b + 4 = 4$, soit $a + b = 0$.
   De même, $f(2) = 2a + b + \dfrac{4}{2} = 2a + b + 2$.
   On a vu que $f(2) = 3$.
   Donc $2a + b + 2 = 3$, soit $2a + b = 1$.
   D'où le système $\left\{\begin{array}{r} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{r} b=-a \\ 2a-a=1 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{r} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$

D'où $a = 1$ et $b = -1$.

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0,\ f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x}.}$

(b) Calculer alors $f'(x)$.

$\boxed{f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}.}$

(c) Retrouver par le calcul les résultats de la question 2.

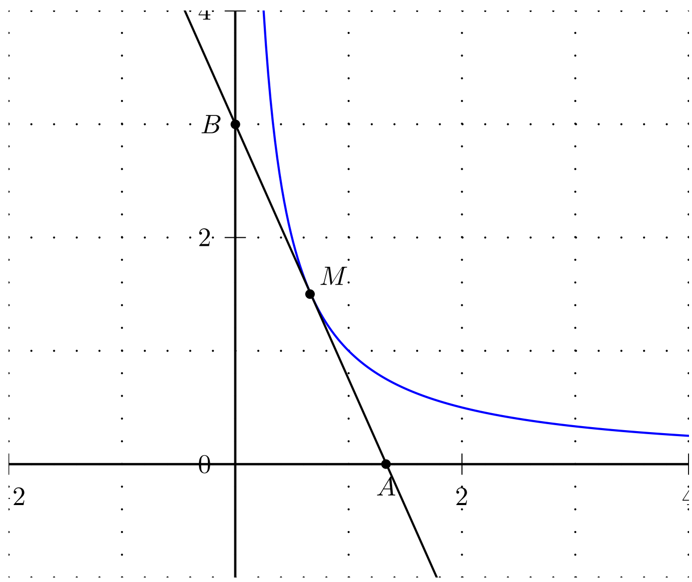
$$\begin{array}{rcl} f'(1) & = & 1 - \dfrac{4}{1^2} \\ & = & 1 - 4 \\ & = & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f'(2) & = & 1 - \dfrac{4}{2^2} \\ & = & 1 - 1 \\ & = & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien } f'(1) = -3 \text{ et } f'(2) = 0.}$

Exercice 4 (n° 63 page 72)

1. Construire l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.



2. Soit M le point d'abscisse a de $\mathcal{H}$ ($a > 0$).
Écrire en fonction de a une équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point M.
Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit $a > 0$. On a clairement $f(a) = \dfrac{1}{a}$.

La fonction inverse est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(a)(x - a) + f(a) \\ y & = & -\dfrac{1}{a^2}(x - a) + \dfrac{1}{a} \\ y & = & -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} \end{array}$$

$\boxed{\text{La tangente } d \text{ à } \mathcal{H} \text{ en } M(a; f(a)) \text{ a pour équation } y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}.}$

3. La tangente en M coupe les axes en A et B.
Calculer en fonction de a, les coordonnées de A et B.
Le point A appartient à d et à l'axe des abscisses, donc $y_A = 0$.
En rempaçant dans l'équation de d, on a

$$\begin{aligned} \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a} &= 0 \\ \frac{-1}{a^2}x &= -\frac{2}{a} \\ x &= 2a \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } A(2a;0).}$
Le point B appartient à d et à l'axe des ordonnées, donc $x_B = 0$.
En rempaçant dans l'équation de d, on a

$$y_B = \frac{2}{a}$$

$\boxed{\text{Donc } B\left(0;\frac{2}{a}\right).}$

4. Démontrer que M est le milieu de $[AB]$ quel que soit $a > 0$.
Soit $a > 0$. On a $M(a;\frac{1}{a})$.
Notons I le milieu de $[AB]$.
$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2a+0}{2} = a.$
$y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{\frac{2}{a}}{2} = \frac{2}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{a} = f(a).$
Donc $I(a;\frac{1}{a})$.
Ainsi, I et M sont confondus, et M est bien le milieu de $[AB]$.
$\boxed{\text{Pour tout } a > 0,\ M \text{ est le milieu de } [AB].}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. (a) Calculer la dérivée de f.
Comme toute fonction polynôme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x^2 - 2x - 3) \end{aligned}$$

(b) Déterminer et construire le tableau de variation de f sur $[-2;4]$.
On étudie le signe du trinôme $x^2 - 2x - 3$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = 16 > 0$.
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{2} = -1.$
$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2} = 3.$
$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)$ a le même signe que $x^2 - 2x - 3$, qui est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	-2		-1		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	-19

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) + 1 = -1 - 3 + 9 + 1 = 6.$
De même, $f(-2) = -1$, $f(3) = -26$, et $f(4) = -19$.

(c) En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-2;4]$.
Sur $[-2;4]$, le maximum de f est 6 et le minimum de f est -26.
$\boxed{\text{Lorsque } x \in [-2;4],\ -26 \leqslant f(x) \leqslant 6.}$

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 1.
On a vu que $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
$f'(1) = 3 - 6 - 9 = -12$.
Par ailleurs, $f(1) = 1 - 3 - 9 + 1 = -10$.

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(1)(x-1) + f(1) \\ y & = & -12(x-1) - 10 \\ y & = & -12x + 2 \end{array}$$

$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C} \text{ au point d'abscisse 1 a pour équation } y = -12x + 2.}$

3. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) - (-12x + 2) = (x-1)(x^2 - 2x + 1).$$
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) - (-12x+2) & = & x^3 - 3x^2 - 9x + 1 - (-12x + 2) \\ & = & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} (x-1)(x^2 - 2x + 1) & = & x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 \\ & = & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) - (-12x + 2) = (x-1)(x^2 - 2x + 1).}$

(b) Déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.
On étudie le signe de $f(x) - (-12x + 2)$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) - (-12x+2) & = & (x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ & = & (x-1)(x-1)^2 \\ & = & (x-1)^3 \end{array}$$

Donc $f(x) - (-12x + 2)$ a le même signe que $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x) - (-12x+2)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc } \mathscr{C} \text{ est en-dessous de la tangente } T \text{ sur }]-\infty;1[. \\ \text{Donc } \mathscr{C} \text{ est en-dessus de } T \text{ sur }]1;+\infty[.\end{array}}$

4. Existe-t-il des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Dans l'affirmative préciser les coordonnées de ces points.
La tangente est parallèle à cette droite si elle a la même coefficient directeur : -9.
On résout l'équation $f'(x) = -9$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -9 \\ 3x^2 - 6x - 9 & = & -9 \\ 3x^2 - 6x & = & 0 \\ x^2 - 2x & = & 0 \\ x(x-2) & = & 0 \\ x = 0 & \text{ou} & x = 2 \end{array}$$

$f(0) = 1$, et $f(2) = -21$.
$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe deux tangentes à } \mathscr{C} \text{ qui sont parallèles à la droite d'équation } y = -9x + 2. \\ \text{Ce sont les tangentes aux points } A(0;1) \text{ et } B(2;-21).\end{array}}$

3 Suites

Exercice 6

Une urne contient 5 boules noires et 2 boules blanches. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. À tout moment, chacune des boules a la même probabilité d'être choisie.

1. Dans cette question, on suppose que l'on effectue 2 tirages successifs d'une boule dans l'urne. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est $\frac{24}{49}$.
   Notons A : "On obtient au moins une boule blanche".
   Alors $\overline{A}$: "On n'obtient aucune boule blanche".
   Autrement dit, $\overline{A}$ correspond au tirage $(N;N)$ (2 boules noires).
   $P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$.
   $\boxed{\text{Donc } P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}.}$
2. On suppose désormais que l'on effectue n tirages ($n \geqslant 1$), et l'on note p_n la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche sur les n tirages.
   (a) Justifier que $p_n = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n$.
   Avec les mêmes notations, $\overline{A}$ correspond au tirage de n boules noires $(N;N;N;\ldots;N)$.
   $P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{7}\right)^n$.
   $\boxed{p_n = P(A) = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n.}$
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = \frac{2 \times 5^n}{7^{n+1}}$.
$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} - \left(1 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right) \\ &= \left(\frac{5}{7}\right)^n - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{5}{7}\right)^n \times \left(1 - \frac{5}{7}\right) \\ &= \left(\frac{5}{7}\right)^n \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{2 \times 5^n}{7^{n+1}} \end{aligned}$$
   (c) Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la suite (p_n) ?
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} - p_n = \frac{2 \times 5^n}{7^{n+1}} > 0$.
   $\boxed{\text{On en déduit que la suite } (p_n) \text{ est croissante.}}$
   (d) (Question bonus)
      i. Écrire un algorithme qui permette de trouver le plus petit entier n_0 tel que $p_{n_0} \geqslant 0,999$.
      DEBUT
      N `prend la valeur` 1
      P `prend la valeur` $\frac{2}{7}$
      `Tant que` $P < 0,999$
      N `prend la valeur` $N + 1$
      P `prend la valeur` $1 - \left(\frac{5}{7}\right)^N$
      `Fin Tant que`
      `Afficher` N
      FIN
      ii. Programmer cet algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.
      $\boxed{\text{On trouve } n_0 = 21.}$

iii. Interpréter le résultat précédent par une phrase.

> À partir de 21 tirages successifs, la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche est supérieure à 0,999.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes (en justifiant le résultat) :

1. $A = 7 + 10 + 13 + \cdots + 304 + 307$.
   A est une somme de termes de la la suite arithmétique de raisin 3 et de premier terme $u_0 = 7$.
   On cherche le nombre de termes, et pour cela on cherche à quelle valeur de n correspond 307.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 7 + 3n$.

$$\begin{aligned} 7+3n &= 307 \\ 3n &= 300 \\ n &= 100 \end{aligned}$$

   Donc, en posant $u_0 = 7$, on a $u_{100} = 307$. La somme A compte 101 termes.

$$\begin{aligned} A &= 7+10+13+\cdots+304+307 \\ &= \frac{(7+307)\times 101}{2} \\ &= 15\,857 \end{aligned}$$

2. $B = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$.
   B est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 3.
   La somme allant de $3^0 = 1$ à 3^{15}, elle contient 16 termes.

$$\begin{aligned} B &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15} \\ &= 1 \times \frac{1-3^{16}}{1-3} \\ &= \frac{3^{16}-1}{2} \\ &= 21\,523\,360 \end{aligned}$$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{4}u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   $u_0 = 6$.
   $u_1 = -\dfrac{1}{4} \times u_0 + 5 = -\dfrac{1}{4} \times 6 + 5 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{10}{2} = \dfrac{7}{2} = 3,5$.
   $u_2 = -\dfrac{1}{4} \times u_1 + 5 = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{7}{2} + 5 = -\dfrac{7}{8} + \dfrac{40}{8} = \dfrac{33}{8} = 4,125$.
   $u_3 = -\dfrac{1}{4} \times u_2 + 5 = -\dfrac{1}{4} \times \dfrac{33}{8} + 5 = -\dfrac{33}{32} + \dfrac{160}{32} = \dfrac{127}{32} = 3,96875$.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? Justifier.
   $u_1 - u_0 = 3,5 - 6 = -2,5$.
   $u_2 - u_1 = 4,125 - 3,5 = 0,625$.
   Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
   > Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

   $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3.5}{6} =\approx 0.583$
   $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{4.125}{3,5} \approx 1,179$.
   > Donc (u_n) n'est pas non plus géométrique.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n - 4.$$

(a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= -\frac{1}{4}u_n + 5 - 4 \\ &= -\frac{1}{4}u_n + 1 \\ &= -\frac{1}{4}(u_n - 4) \\ &= -\frac{1}{4} \times v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4} = -0,25$.
$v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$.

$\boxed{(v_n) \text{ est la suite géométrique de raison } -\frac{1}{4} \text{ et de premier terme } v_0 = 2.}$

(b) Exprimer v_n en fonction de n.
Indication : on aura trouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$.

$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 2 \times (-0,25)^n.}$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2 \times (-0.25)^n + 4.$$

Comme pour tout entier n, $v_n = u_n - 4$, on a $u_n = v_n + 4$.

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 \times (-0.25)^n + 4.}$

4. Pour tout $n \geqslant 0$, on note S_n et S'_n les sommes suivantes :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$
$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

(a) Exprimer S_n en fonction de n.
S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique (v_n) (l'indice va de 0 à n, d'où $n+1$ termes).
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 2 \times \frac{1 - (-0.25)^{n+1}}{1 - (-0.25)} \\ &= 2 \times \frac{1 - (-0.25)^{n+1}}{1.25} \\ &= \frac{8}{5}\left[1 - (-0.25)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $S'_n = \frac{8}{5}\left[1 - (-0.25)^{n+1}\right] + 4n + 4$.
On rappelle que pour tout entier k, $u_k = v_k + 4$.

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (v_k + 4) \\ &= \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} 4 \\ &= \frac{8}{5}\left[1 - (-0.25)^{n+1}\right] + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n+1 \text{ fois}} \\ &= \frac{8}{5}\left[1 - (-0.25)^{n+1}\right] + 4n + 4 \end{aligned}$$

Exercice 9
Partie A

1. Chaque mensualité coûte 300 euros de plus que la précédente,
donc, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = u_n + 300$.
La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 300.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 300 donc :
pour tout entier n non nul, $u_n = u_1 + 300(n-1)$.
De plus $u_1 = 8000$, donc pour tout entier n non nul, $u_n = 8000 + 300n - 300 = 300n + 7700$.
3. La somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise est : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{120}$.
Or (u_n) est une suite arithmétique donc $S = 120\ \dfrac{u_1 + u_{120}}{2}$.
De plus $u_{120} = 300 \times 120 + 7700 = 43700$,
donc $S = 120\ \dfrac{8000 + 43700}{2} = 120 \times 25850 = 3102000$.
La somme totale remboursée par l'entreprise en 10 ans est donc de 3102000 euros.

Partie B

1. Chaque mois la mensualité augmente de 1 % ,
donc, pour tout entier n non nul, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{100}v_n = 1,01v_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1,01$.
2. La suite (u_n) est géométrique de raison $1,01$,
donc pour tout entier n non nul, $v_n = v_1 \times 1,01^{n-1}$.
3. Le versement total en 10 ans est de : $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_{120}$.
Or (v_n) est une suite géométrique donc :
$V = v_1\ \dfrac{1 - 1,01^{120}}{1 - 1,01} = v_1\ \dfrac{1 - 1,01^{120}}{-0,01} = 100v_1(1,01^{120} - 1)$
4. Le versement total est de 3 000 000 si et seulement si $V = 3000000$.

$$\begin{aligned} V = 3000000 &\iff 100v_1(1,01^{120} - 1) = 3000000 \\ &\iff v_1 = \frac{30000}{1,01^{120} - 1} \\ &\iff v_1 \approx 13041,28 \end{aligned}$$

Pour un rembousement total de 3 000 000, le premier versement doit être de 13041,28 euros.

Partie C

1. Chaque mensualité coûte 500 euros de plus que la précédente,
donc, pour tout entier n non nul, $w_{n+1} = w_n + 500$.
La suite (w_n) est donc arithmétique de raison 500.
On en déduit que, pour tout entier n non nul,
$w_n = w_1 + 500(n-1) = 15000 + 500n - 500 = 500n + 14500$.
Donc la somme totale versée jusqu'au $n^{\text{ième}}$ mois est :
$S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n = n\ \dfrac{w_1 + w_n}{2} = n\ \dfrac{15000 + 500n + 14500}{2} = n(250n + 14750)$.
2. On cherche à déterminer quand $S_w \geqslant 2500000$, c'est à dire $250n^2 + 14750n - 2500000 \geqslant 0$.
En simplifiant par 250, on obtient l'inéquation : $n^2 + 59n - 10000 \geqslant 0$.
$n^2 + 59n - 10000$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est
$\Delta = 59^2 + 40000 = 43481$.
Ce polynôme a donc deux racines : $n_1 = \dfrac{-59 - \sqrt{43481}}{2}$ et $n_2 = \dfrac{-59 + \sqrt{43481}}{2} \approx 74,7$. De plus le coefficient de n^2 est positif donc, pour tout $n \geqslant n_2$: $n^2 + 59n - 10000 \geqslant 0$.
Donc, l'entreprise aura terminé ses remboursements au bout de 75 mois.

Exercice 10
Le salaire de Monique est de 1600 euros en janvier 2013. Chaque mois il augmente de 9 euros.
On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2013, v_1 le salaire du mois de février 2013 et v_n le salaire du mois de rang $n+1$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+1} = v_n + 9.}$

2. Exprimer v_n en fonction de n.
   (v_n) est la suite arithmétique de 1er terme $v_0 = 1600$ et de raison 9.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = v_0 + nr = 1600 + 9n.}$
3. À quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1600 + 9n \geqslant 2000$, soit $9n \geqslant 400$, $n \geqslant \dfrac{400}{9} \approx 44,4$.
   Le plus petit entier n qui convient est $n = 45$.
   $\boxed{\text{Le salaire dépasse 2000 euros pour la 1re fois le mois correspondant à } n = 45 \text{ soit en octobre 2016.}}$
   Vérification :
   $r = 9 > 0$ donc la suite est croissante.
   $v_{44} = 1600 + 44 \times 9 = 1996$, et $v_{45} = 1600 + 45 \times 9 = 2005$.
4. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2013 à décembre 2023 inclus ?
   La période janvier 2013 à décembre 2023 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1600 + 131 \times 9 = 2779$.

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1600 + 2779}{2} \times 132 \\ &= 289\,014 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2013-décembre 2023 est de 289 014 euros.}}$

Exercice 11

1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est $0,375\,375\,375\ldots$ où 375 est répété indéfiniment. Est-il rationnel ?
   Si la partie décimale d'une nombre est périodique, alors le nombre est rationnel.
   $\boxed{\text{Le nombre } B \text{ est donc rationnel.}}$
2. On considère la suite définie par $v_1 = 0,375$ et, pour tout entier n, $v_{n+1} = 10^{-3}v_n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (v_n).
   Pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 10^{-3}v_n$. Donc par définition (v_n) est géométrique.
   $\boxed{(v_n) \text{ est la suite géométrique de raison } 10^{-3} \text{ et de 1er terme } v_1 = 0,375.}$
   (b) Donner l'écriture décimale de v_2, v_3 et $v_1 + v_2 + v_3$.
   $v_1 = 0,375$.
   $v_2 = v_1 \times 10^{-3} = 0,375 \times 0,000\,1 = 0,000\,375$.
   $v_3 = v_2 \times v_2 = 0,000\,000\,375$. $\boxed{\text{Ainsi, } v_1 + v_2 + v_3 = 0,375\,375\,375.}$
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
   S_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique (v_n) (il y a n termes de v_1 à v_n).

$$\begin{aligned} S_n &= v_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= 0,375 \times \frac{1 - (10^{-3})^n}{1 - 10^{-3}} \\ &= 0,375 \times \frac{1 - 10^{-3n}}{0,999} \\ &= \frac{375}{999} \times (1 - 10^{-3n}) \\ &= \frac{125}{333} \times (1 - 10^{-3n}) \end{aligned}$$

   (d) Conjecturer la limite de 10^{-3n} lorsque n tend vers $+\infty$ et en déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   Que représente ce nombre par rapport à B ?
   Il semble que $\lim 10^{-3n} = 0$.
   Justification : $10^{-3n} = (10^{-3})^n$. Comme $-1 < 10^{-3} < 1$, $\lim(10^{-3})^n = 0$.

On en déduit que lorque n tend vers l'infini, $\lim 1-10^{-3n} = 1$, et, par produit, que $\lim S_n = \dfrac{125}{333}$.
La suite (S_n) converge vers une limite finie qui est $\dfrac{125}{333}$.

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & 0,375\ 375\ 375\ldots 375 \quad \text{(375 apparait } n \text{ fois)} \\ \lim Sn & = & 0,375\ 375\ 375\ldots \quad \text{(375 repete indefiniment)} \\ \dfrac{125}{333} & = & B \end{array}$$

$\boxed{\text{L'écriture de } B \text{ sous forme de fraction irréductible est } B = \dfrac{125}{333}.}$

Exercice 12

Lucas lâche une balle d'une hauteur de 24 m. Lorsque la balle rebondit, la hauteur de son rebond perd 10% par rapport à la hauteur du rebond précédent. On pose $u_0 = 24$ et l'on note u_n la hauteur du n^{e} rebond.

1. Calculer u_1.
   On a $u_0 = 24$.
   $u_1 = 24 - 24 \times \dfrac{10}{100} = 24 \times 0.9 = 21.6$.
   $\boxed{\text{Le premier rebond a une hauteur de 21.6 m.}}$
2. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n \times \dfrac{10}{100} = u_n - 0.1 \times u_n = 0.9 \times u_n$.
   $\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0.9.}$
3. On estime que la balle ne rebondit plus lorsque le rebond est inférieur à 1 cm.
   Combien de rebonds a fait la balle ?
   On note p ce nombre.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = 24 \times 0.9^n$.
   On cherche la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \leqslant 0.01$ (puisque la hauteur u_n du n^{e} rebond est exprimée en m).
   A l'aide de la calculatrice, on obtient $u_{73} \approx 0.0109$ et $u_{74} \approx 0.0098$. De plus, la suite (u_n) décroît car $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$.
   La balle a donc fait 73 rebonds ayant des hauteurs supérieures à 1 cm.
   $\boxed{\text{On considère qu'elle a fait 73 rebonds puis s'est immobilisée : } p = 73.}$
4. Quelle est alors la distance parcourue par la balle pendant ces p rebonds ?
   Pour chaque rebond, la balle parcourt la longueur u_n une fois en montant, et une fois en descendant.
   L'énoncé dit que « Lucas lâche une balle d'une hauteur de 24 m ».
   Notons D la distance totale parcourue par la balle.

$$\begin{array}{rcl} D & = & 24 + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} 2u_n \\ & = & 24 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{p} u_n \\ & = & 24 + 2 \times (u_1 + \cdots + u_{73}) \\ & = & 24 + 2 \times 21,6 \times \dfrac{1 - 0.9^{73}}{1 - 0.9} \\ & \approx & 455.8 \end{array}$$

   $\boxed{\text{La balle a parcouru environ 455.8 m.}}$

Exercice 13

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$.

1. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -2n + 5$, qui n'est pas constant (dépend de n).
   On va fournir un contre-exemple à la définition d'une suite arithmétique en considérant les premiers termes :
   $u_0 = 4$.

$u_1 = 4 - 0 + 5 = 9$.
$u_2 = 9 - 2 + 5 = 12$.
Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
Il est clair qu'on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre.
$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique.}}$

2. (v_n) est définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. (v_n) arithmétique ?

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) \\ &= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\ &= u_{n+1} - 2(n+1) + 5 - 2u_{n+1} + u_n \\ &= -u_{n+1} - 2n + 3 + u_n \\ &= -u_n + 2n - 5 - 2n + 3 + u_n \\ &= -2 \end{aligned}$$

Pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n - 2$.
$\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -2.}$
Autre méthode pour le calcul, $v_n = -2n + 5$.
Donc $v_{n+1} - v_n = (-2 \times (n+1) + 5) - (-2n + 5) = -2$.

3. Exprimer v_n en fonction de n.
$v_0 = u_1 - u_0 = 9 - 4 = 5$.
Pour tout n, $v_n = v_0 + nr$.
$\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ v_n = 5 - 2n, \text{ comme on l'a vu déjà.}}$

4. $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= \frac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{5 + 5 - 2n}{2} \times (n+1) \\ &= (5 - n)(n+1) \end{aligned}$$

5. Démontrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.
En revenant à la définition de (v_n),

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \\ &= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \\ &= u_{n+1} - u_0 \end{aligned}$$

6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
Pour tout n, $u_{n+1} = S_n + u_0$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= S_{n-1} + u_0. \\ u_n &= [5 - (n-1)] \times (n - 1 + 1) + 4 \\ &= (6 - n)n + 4 \\ &= -n^2 + 6n + 4 \end{aligned}$$

Or, cette formule, en remplaçant n par 0, donne $u_0 = 4$.
La formule est donc correcte pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2 + 6n + 4.}$

4 Trigonométrie

Exercice 14
Soit x un nombre réel. Exprimer en fonction de $\sin x$ et/ou de $\cos x$ les nombres suivants :
$A(x) = 3\sin(\pi + x) + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(-x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

$B(x) = 2\cos(-x-\pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\cos(-x)$.

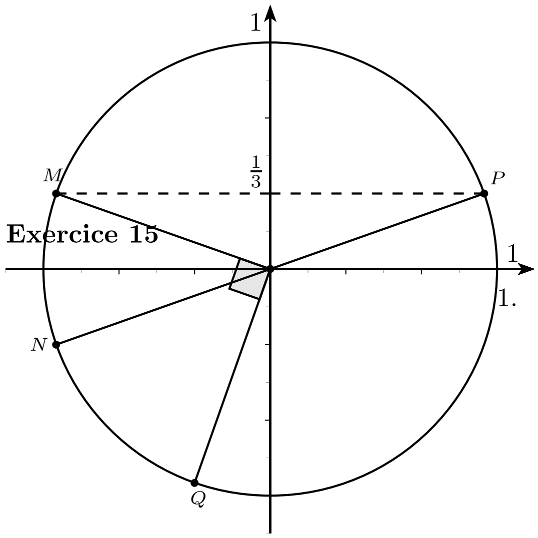
$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & 3\sin(\pi + x) + 5\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + 2\sin(-x) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \\ & = & -3\sin(x) + 5\sin(x) - 2\sin(x) - \cos(x) \\ & = & -\cos(x) \end{array}$$

$B(x) = 2\cos(-x-\pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\cos(-x)$.

$$\begin{array}{rcl} B(x) & = & 2\cos(-x-\pi) + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\cos(-x) \\ & = & -2\cos(x) - \cos(x) - 4\cos(x) \\ & = & -7\cos(x) \end{array}$$

Exercice 15

1.

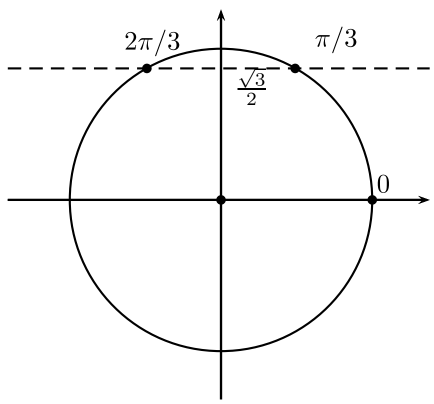


On a : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$,
donc $\cos^2 t = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$,
donc $\cos t = \sqrt{\dfrac{8}{9}}$ ou $\cos t = -\sqrt{\dfrac{8}{9}}$.
Or t appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, donc $\cos t = -\sqrt{\dfrac{8}{9}}$,
donc $\cos t = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

3. On a :
$\sin(-t) = -\sin t = -\dfrac{1}{3}$
$\sin(\pi - t) = \sin t = \dfrac{1}{3}$
$\cos(\dfrac{\pi}{2} + t) = -\sin t = -\dfrac{1}{3}$
$\sin(\dfrac{\pi}{2} + t) = \cos t = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercice 16
Résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 4\pi]$.

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$.



Donc $x = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ et $\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dans $[0; 4\pi]$, les solutions sont : $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; et $\dfrac{8\pi}{3}$.

Exercice 17
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$, puis dans $[0, 2\pi[$.

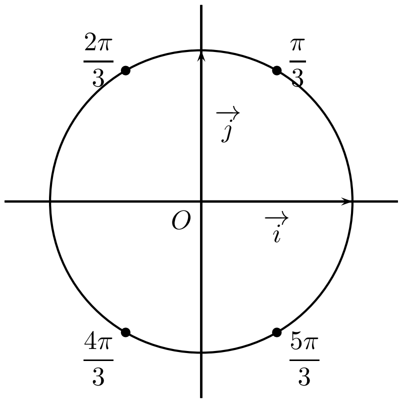
$$\left\{\begin{array}{c} 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.}$$

Déterminons les solutions de cette équation dans $[0; 2\pi[$.
Première famille de solutions :
Avec $k = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3} \in [0; 2\pi[$.
Avec $k = 1$, $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3} \in [0; 2\pi[$.
Avec $k = 2$, $x = \dfrac{7\pi}{3} \notin [0; 2\pi[$.

Deuxième famille de solutions :
Si $k = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{3} \notin [0; 2\pi[$.
Si $k = 1$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3} \in [0; 2\pi[$.
Si $k = 2$, $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{3} \in [0; 2\pi[$.

$$\boxed{\text{Les solutions de cette équation dans } [0; 2\pi[\text{ sont : } \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \text{ et } \dfrac{5\pi}{3}.}$$



Exercice 18

1.

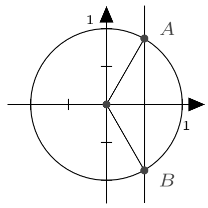
$$\begin{aligned} 2\sin^2 x - \sin x = 0 &\iff \sin x(2\sin^2 x - 1) = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\sin x - 1 = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned}$$

Dans $[-\pi; 2\pi]$, l'équation a 6 solutions : $-\pi$; 0 ; π ; 2π ; $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{5\pi}{6}$.

2. (a)

$$6-12\cos x=0 \iff \cos x=\frac{1}{2}$$
$$\iff x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{ou} \quad x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Dans $[0;2\pi[$, l'équation a 2 solutions : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$.



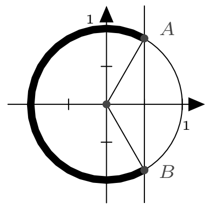
La solution $\frac{\pi}{3}$ est représentée par A.
La solution $\frac{5\pi}{3}$ est représentée par B.

(b)

Sur $[0;2\pi]$:

$$6-12\cos x \geqslant 0 \iff \cos x \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\iff x \geqslant \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad x \leqslant \frac{5\pi}{3}$$

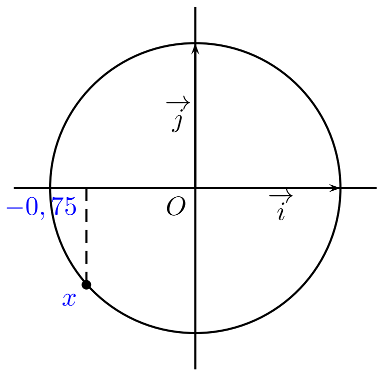
Dans $[0;2\pi]$, l'ensemble des solutions est : $\left[\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$.



Exercice 19 (98 p 179)

Soit x un réel de $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Sachant que $\cos x=-\frac{3}{4}$, placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Calculer $\sin x$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.
   Donc $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$.
   Donc $\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Comme $x\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x\leqslant 0$.
   $\boxed{\text{Donc } \sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}}$
3. Calculer $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$, $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(\pi-x)$, $\sin(x+\pi)$, et $\sin(\pi-x)$.
   $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
   $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x=-\frac{3}{4}$.
   $\cos(x+\pi)=-\cos x=\frac{3}{4}$.
   $\cos(\pi-x)=-\cos x=\frac{3}{4}$.
   $\sin(x+\pi)=-\sin x=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
   $\sin(\pi-x)=\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.